

ISFD 27

2DO NIVEL PROF. EN MATEMÁTICA

ÁLGEBRA **2**

V2026

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ



UNIDAD 1 MATRICES

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

UNIDAD 1. MATRICES

1. DEFINICIÓN

Una *matriz* es un conjunto de números reales o complejos distribuidos en filas y columnas que sirve para analizar cualquier disposición del tipo rectangular.

Usualmente, nombramos a las matrices con letra imprenta mayúscula: matriz *A*, matriz *M*, etc.

Suponiendo que una matriz tiene *m* filas y *n* columnas, llamamos *orden de la matriz* a la expresión $m \times n$.

La forma genérica de escribir una matriz es la siguiente:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz también puede expresarse de la forma $A = (a_{ij})$ donde a_{ij} es el elemento genérico que ocupa la fila *i*-ésima y la columna *j*-ésima. Por supuesto, *i* varía entre 1 y *m*, así como *j* varía entre 1 y *n*.

Por *ejemplo*, en la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2i \end{pmatrix}$ el elemento a_{21} es $a_{21} = -3$.

Expresaremos $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con elementos *reales*.

Ejercicio 1. Para la matriz *M*, identifique:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0,2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) su orden.
- b) los elementos m_{31} , m_{42} y m_{23} .
- c) todos los elementos m_{ij} con $i = j$.

Ejercicio 2. Escriba una matriz *A* de orden 3×3 que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

- a) $a_{ij} = 4 \quad \forall i = j$
 $a_{ij} = 2 - i \quad \forall i > j$ Aclaración: "i" hace referencia al número de fila
 $a_{ij} = j^2 \quad \forall i < j$
- b) $a_{ij} = 2j + 1 \quad \forall i, j$
- c) $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

2. CLASIFICACIÓN DE LAS MATRICES

MATRIZ CUADRADA. Dada una matriz *A* de orden $m \times n$, diremos que la misma es *cuadrada* si y sólo si $m = n$. De lo contrario, se dice que es *rectangular*. A la línea formada por todos los elementos de una matriz cuadrada para los que $i = j$ se la llama *diagonal principal*.

Ejemplos

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es cuadrada, pero la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no lo es.

La diagonal principal de la matriz A es la que se destaca en el siguiente esquema: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

MATRIZ FILA. Dada una matriz A de orden $m \times n$, diremos que la misma es *matriz fila* si y sólo si $m = 1 \wedge n > 1$.

Ejemplo

La matriz $C = (1 \ 2 \ 0)$ es una matriz fila.

MATRIZ COLUMNA. Dada una matriz A de orden $m \times n$, diremos que la misma es *matriz columna* si y sólo si $n = 1 \wedge m > 1$.

Ejemplo

La matriz $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una matriz columna.

MATRIZ REAL. Dada una matriz A de orden $m \times n$, diremos que es *real* si y sólo si $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j$

Ejemplo

La matriz $E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ no es una matriz real.

MATRIZ NULA. Se define como *matriz nula* a la matriz A de orden $m \times n$, que cumple que para todo i, j son $a_{ij} = 0$. La simbolizaremos \mathbb{O} .

Ejemplo

La matriz $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2×4 .

MATRIZ DIAGONAL. Una matriz A de orden $m \times n$ es una *matriz diagonal* si, siendo cuadrada, todos los elementos que se encuentren fuera de su diagonal principal son nulos. Es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Ejemplo

La matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal. (La matriz cuadrada nula, ¿es una matriz diagonal?)

MATRIZ ESCALAR. Una matriz A es una *matriz escalar* si además de ser diagonal, todos los elementos que están en la diagonal principal son iguales entre sí: $a_{ij} = 0, \forall i \neq j \wedge a_{ij} = k, \forall i = j$

Ejemplo

La matriz $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar. (La matriz cuadrada nula, ¿es una matriz escalar?)

MATRIZ IDENTIDAD. Una matriz A es una *matriz identidad* si además de ser escalar se verifica que $a_{ij} = 1, \forall i = j$. La simbolizaremos \mathbb{I} .

Ejemplo

Las matrices $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices identidad.

MATRIZ TRIANGULAR. Una matriz A es una *matriz triangular inferior* si y sólo si $a_{ij} = 0, \forall i < j$. Y es *triangular superior* si y sólo si $a_{ij} = 0, \forall i > j$

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior.

MATRIZ SIMÉTRICA. Una matriz A es una *matriz simétrica* si se verifica $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

Ejemplo

La matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular simétrica.

Ejercicio 3. Clasifique a las siguientes matrices en cuadradas, rectangulares, fila, columna, real, nula, diagonal, escalar, identidad, triangular inferior o superior y/o simétrica:

a) $M_1 = (1 \quad 1 + 2i \quad 3)$ b) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ d) $M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) $M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. IGUALDAD DE MATRICES

Dadas dos matrices A y B del mismo orden $m \times n$, diremos que $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j . Es decir que cada elemento que ocupa la posición ij en la matriz A debe ser el mismo que cada elemento que ocupa la posición ij en la matriz B .

Ejercicio 4. Determine el valor de las incógnitas en cada pareja de matrices para que resulten iguales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x^2 - 1 & 0 \\ 4 - x & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 4 & 0 \\ x + 2 & 7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ a - b & 4 \end{pmatrix}$

4. OPERACIONES CON MATRICES

4.1. SUMA DE MATRICES

Dadas dos matrices A y B del mismo orden $m \times n$, se define como suma entre ellas a una nueva matriz S también de orden $m \times n$, en donde cada elemento s_{ij} se obtiene como la suma entre el elemento a_{ij} de A y el elemento b_{ij} de B .

Es decir, dadas $A_{m \times n} = (a_{ij})$ y $B_{m \times n} = (b_{ij})$ se define:

$$S_{m \times n} = A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (s_{ij})$$

Ejemplo

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LA SUMA DE MATRICES

La suma de matrices cumple las mismas propiedades que la suma de sus elementos.

Es una operación interna

En efecto, dadas $A \in M_{m \times n} \wedge B \in M_{m \times n} \Rightarrow (A + B) \in M_{m \times n}$, lo cual significa que la matriz suma conserva el orden de las originales.

Propiedad asociativa (*)

Dadas tres matrices $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ y $C_{m \times n}$ se cumple que: $(A + B) + C = A + (B + C)$

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } (A + B) + C &= [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})) = \\ &= (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})] = A + (B + C) \end{aligned}$$

Propiedad conmutativa (*)

Dadas dos matrices $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ se cumple que: $A + B = B + A$

$$\text{Demostración: } A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$$

Existencia del elemento neutro (*)

Dada $A_{m \times n}$ existe una matriz $E_{m \times n}$ tal que $A + E = E + A = A$. Se demuestra que $E = \mathbb{O}$.

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } A + E &= (a_{ij}) + (e_{ij}) = (a_{ij} + e_{ij}) = (a_{ij}) = A \Rightarrow a_{ij} + e_{ij} = a_{ij} \Rightarrow e_{ij} = 0 \\ \Rightarrow E &= \mathbb{O} \end{aligned}$$

Existencia del elemento opuesto (*)

Dada $A_{m \times n}$ existe una matriz $A'_{m \times n}$ tal que $A + A' = A' + A = \mathbb{O}$. Se demuestra que $A' = -A$, que es la matriz formada por todos los elementos opuestos de A .

$$\text{Demostración: } A + A' = (a_{ij}) + (a'_{ij}) = (a_{ij} + a'_{ij}) = (0) = \mathbb{O} \Rightarrow a_{ij} + a'_{ij} = 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij}$$

$$\Rightarrow A' = -A$$

4.2. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Dada una matriz A de orden $m \times n$, y un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) el producto del escalar por la matriz es una nueva matriz del mismo orden que A que se obtiene multiplicando a cada elemento a_{ij} de A por el escalar α .

Es decir: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha \cdot a_{ij})$

Ejemplos

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } -2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 1 \\ -i & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ entonces } i \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -1 & i & i \\ 1 & 2i & 2i \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ENTRE UNA MATRIZ Y UN ESCALAR

Sea K el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos:

Es una operación externa

En efecto, dada $A \in M_{m \times n} \wedge \alpha \in K \Rightarrow (\alpha \cdot A) \in M_{m \times n}$, lo cual significa que el producto de una matriz por un escalar es otra matriz del mismo orden que la que se ha multiplicado.

Asociatividad mixta

$$\text{Sean } A \in M_{m \times n} \wedge \alpha \in K \wedge \beta \in K: \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$$

Elemento neutro en K

$$\text{Sean } A \in M_{m \times n} \wedge 1 \in K: 1 \cdot A = A$$

Propiedades distributivas

$$\text{Sean } A \in M_{m \times n} \wedge B \in M_{m \times n} \wedge \alpha \in K: \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

$$\text{Sean } A \in M_{m \times n} \wedge \alpha \in K \wedge \beta \in K: (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Ejercicio 5. Demuestre para la operación definida anteriormente:

- la asociatividad mixta
- la existencia del elemento neutro
- las dos propiedades distributivas

Ejercicio 6. Dadas las siguientes matrices:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

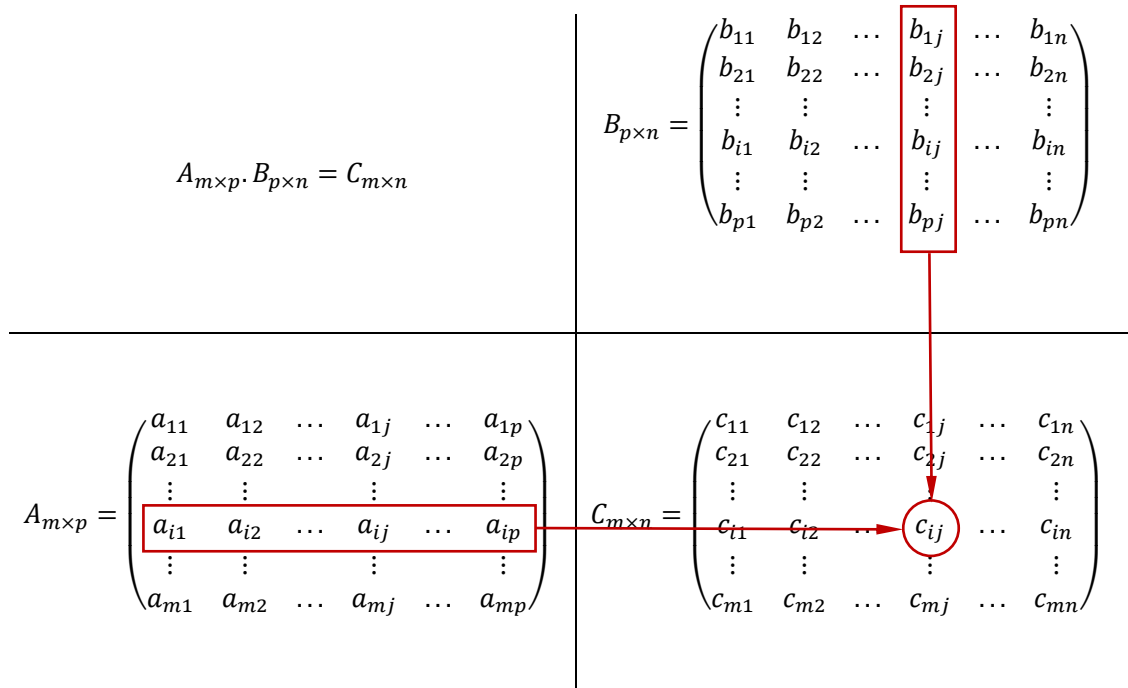
Muestre que se verifican las siguientes igualdades:

a) $2.(3.H) = (2.3).H$

b) $2.(H + M) = 2.H + 2.M$

4.3. PRODUCTO ENTRE DOS MATRICES

Dadas dos matrices A de orden $m \times p$ y otra B de orden $p \times n$, el producto $A \cdot B = C$ se haya definido si y sólo si $p = q$, lo cual significa que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B . La matriz resultado C será de orden $m \times n$ y se obtendrá de la siguiente forma:



Cada elemento c_{ij} se obtiene como la suma de los productos $a_{i1} \cdot b_{1j}, a_{i2} \cdot b_{2j}, \dots, a_{ip} \cdot b_{pj}$ utilizando los elementos que se encuentran en la fila y columna que convergen en él.

Es decir:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Ejemplo

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, hallar el producto $A \cdot B$:

$A \cdot B$			1	2	1	1
1	3	2	$1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)$	$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)$	$1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4$
1	2	0	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 2$	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)$	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)$	$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4$

Luego $A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 3 & 9 \\ 11 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Analice si es posible realizar $B \cdot A$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ENTRE DOS MATRICES

Asociatividad

Sin demostrar, admitiremos que siempre que sea posible realizar los respectivos productos:
 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Asociatividad en el producto de escalares

Siendo A y B dos matrices para las cuales pueda realizarse $A \cdot B$, y α un escalar, entonces:

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$$

Conmutatividad

En general, el producto entre matrices no es conmutativo: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (Existen algunas excepciones: por ejemplo, si se multiplica una matriz cualquiera por una escalar, la conmutatividad se cumple siempre que puedan realizarse ambos productos)

Ejercicio 7. Muestre con un ejemplo que a veces $A \cdot B$ puede estar definido, sin embargo $B \cdot A$ no.

Ejercicio 8. ¿Qué sucede con la multiplicación si las matrices son cuadradas?

Ejercicio 9. Demuestre que el producto entre una matriz A y una matriz escalar E sí es conmutativo, y deduzca el valor de dicho producto. (*)

Elemento neutro

Como consecuencia de lo obtenido en el ejercicio 9, la matriz identidad I es el elemento neutro del producto entre matrices. En efecto, siempre que sea posible el producto $A \cdot I = I \cdot A = A$

Con divisores de cero

El producto entre matrices es con divisores de cero, lo cual significa que el producto entre dos matrices puede ser la matriz nula sin que ninguna de ellas sea necesariamente la nula.

No se cumple la propiedad cancelativa

El producto entre matrices no es cancelativo: $A \cdot B = A \cdot C \neq B = C$

Ejercicio 10. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcule:

- a) $A + B$ b) $A - B$ c) $2A - C$ d) $3B + 2C$

Ejercicio 11. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2+i & i \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcule, si es posible:

- a) $A \cdot B$ b) $A \cdot C$ c) B^2 d) $B \cdot D$

Ejercicio 12. Buscar ejemplos de matrices A y B de orden 2×2 tales que:

- a) $A \cdot B = \mathbb{O} \wedge A \neq \mathbb{O} \wedge B \neq \mathbb{O}$
- b) $A \cdot B = \mathbb{O} \wedge B \cdot A \neq \mathbb{O}$
- c) $A \cdot A = A \wedge A \neq \mathbb{O} \wedge A \neq \mathbb{I}$
- d) $A \cdot A = \mathbb{O} \wedge A \neq \mathbb{O}$

Ejercicio 13. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Justificando la respuesta, hallar si es posible, el valor de a en la matriz A para que:

- a) Se pueda efectuar la suma $A + C$
- b) Si $A \cdot B = H$ entonces el elemento $h_{13} = 0$.

5. TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Dada una matriz A de orden $m \times n$ se llama matriz traspuesta de A y se indica A^t a la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene intercambiando las filas por las columnas; y las columnas por las filas de A .

Ejemplo

Sea $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Decidir cuáles de las siguientes matrices son posibles obtener, justificando todas:

a₁) $A + B$ a₂) $A \cdot B$ a₃) $B \cdot A$ a₄) $B + 2 \cdot C^t$

b) Resolver las operaciones del punto anterior que decidió poder realizar.

6. MATRIZ INVERSA

Dada una matriz A de orden $m \times n$ se llama matriz inversa de A y se indica A^{-1} a la matriz tal que verifique que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}$.

Ejemplo

Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Ejercicio 15. Comprobar el ejemplo anterior según la definición de matriz inversa.



UNIDAD 2 DETERMINANTES

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

UNIDAD 2. DETERMINANTES

1. INTRODUCCIÓN

Un determinante es una *función* que a una matriz cuadrada de orden $n \times n$ (podemos decir directamente “de orden n ”, al ser cuadrada) le hace corresponder un número real o complejo.

Anteriormente, hemos trabajado calculando determinantes de orden 2 y de orden 3 de la siguiente manera:

Determinante de orden 2: $|A_2| = \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Determinante de orden 3: $|A_3| = \det(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \dots ?$

Ejercicio 1. Halle el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ -x & x \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \text{sen}(x) & \text{cos}(x) \\ -\text{cos}(x) & \text{sen}(x) \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} i & i & i \\ 2 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 6 \\ 25 & 9 & 36 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio 2. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -k & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

2. DEFINICIONES PREVIAS

Dada una matriz cuadrada A de orden n , se llama *matriz menor de A* a la submatriz de orden $n - 1$ que se obtiene eliminando la fila i -ésima y la columna j -ésima de A .

Se lo simboliza $M_{ij}(A)$.

Ejemplo

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz menor de a_{21} es $M_{21}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se denomina *cofactor o adjunto* del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A y se anota A_{ij} al número $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij})$.

Ejemplo

Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como la matriz menor de a_{21} es $M_{21}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, el cofactor o adjunto del elemento a_{21} es $C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$.

Ejercicio 3. Calcule todos los cofactores de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. DETERMINANTES DE ORDEN n

Definiremos determinante de orden n a partir de una función recursiva.

Dada una matriz cuadrada A de orden n , se llama determinante de orden n de A y se simboliza $|A|$ o $\det(A)$ al número:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot C_{1k} & n > 1 \end{cases}$$

Ejemplo

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Compruebe el cálculo anterior.

Ejercicio 4. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, calcule para ella:

a) $\sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot C_{1k}$

b) $\sum_{k=1}^n a_{2k} \cdot C_{2k}$

c) $\sum_{k=1}^n a_{3k} \cdot C_{3k}$

d) $\sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot C_{i1}$

e) $\sum_{i=1}^n a_{i2} \cdot C_{i2}$

f) $\sum_{i=1}^n a_{i3} \cdot C_{i3}$

Ejercicio 6. Demuestre el resultado del determinante de la siguiente matriz triangular inferior:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

Una matriz A se dice *regular* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Si una matriz no es regular, entonces es *singular*.

Ejercicio 7. Compruebe que las siguientes matrices son singulares:

a) Matriz nula de orden n .

b) Matriz de orden 3 que tiene dos líneas paralelas iguales.

4. REGLA DE LAPLACE



Como se vio en el ejercicio 5 del apartado anterior, tomar cualquier línea para encontrar el determinante de la matriz, arroja el mismo resultado. Es por eso por lo que se enuncia la siguiente regla:

Dada una matriz cuadrada A de orden n , el determinante de orden n de A puede calcularse eligiendo una línea (fila o columna) de manera arbitraria y realizar la suma de los productos entre cada elemento de la línea y su cofactor o adjunto.

Ejercicio 8. Halle el valor de los siguientes determinantes desarrollándolo por la *línea más conveniente*:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

	<p>Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:</p>	
<p><i>Definición de determinante y Regla de Laplace.</i></p>		

5. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

5.1. El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta: $|A| = |A^t|$

Ejercicio 9. Demuestre la propiedad anterior para determinantes de orden 2 y 3. (*)

5.2. Si una matriz A tiene una línea (fila o columna) cuyos elementos son todos ceros, entonces el determinante de A es $|A| = 0$.

Ejercicio 10. Demuestre la propiedad anterior para un determinante de orden n . (*)

5.3. Sea B la matriz que se obtiene al multiplicar una línea (fila o columna) de la matriz A por una constante k . Entonces $|B| = k \cdot |A|$

Ejercicio 11. Demuestre la propiedad anterior para un determinante de orden n . (*)

Ejercicio 12. Sabiendo que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

halle el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2.d & -2.e & -2.f \\ g & \boxed{?} & i \end{vmatrix} \\
 \text{b) } \begin{vmatrix} \frac{3}{5}.a & 3.b & 3.c \\ \frac{1}{5}.d & e & f \\ \frac{1}{5}.g & \boxed{?} & i \end{vmatrix} \\
 \text{c) } \begin{vmatrix} 6a & -b & c \\ 6d & -e & f \\ 18g & -3\boxed{?} & 3i \end{vmatrix}
 \end{array}$$

5.4. Sea B la matriz que se obtiene al intercambiar dos líneas paralelas (fila o columna) de la matriz A . Entonces $|B| = -|A|$

Ejercicio 13. Demuestre la propiedad anterior para un determinante de orden n .

Ejercicio 14. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ halle el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \\
 \text{b) } \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}
 \end{array}$$

5.5. (Corolario de la propiedad 5.4.) Si una matriz A tiene dos líneas paralelas iguales, entonces se cumple que $|A| = 0$.

Ejercicio 15. Dada una matriz A , construya otra matriz B intercambiando dos líneas paralelas iguales de A entre sí. Luego, aplique la propiedad 5.4. para demostrar la propiedad 5.5. (*)

5.6. (Corolario de las propiedades 5.3. y 5.5) Si una matriz A tiene dos líneas paralelas proporcionales, entonces $|A| = 0$.

Ejercicio 16. Dada una matriz cuadrada A de orden 3, con dos líneas paralelas proporcionales, aplique las propiedades 5.3. y 5.5. para demostrar la propiedad 5.6. (*)

5.7. Sea B la matriz que se obtiene al sumarle a una línea (fila o columna) de la matriz A , un múltiplo escalar de otra línea paralela. Entonces $|B| = |A|$.

Ejercicio 17. Demuestre la propiedad anterior.

5.8. El determinante del producto entre dos matrices es igual al producto de los determinantes. En símbolos:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Ejercicio 18. Utilizando la propiedad anterior, demuestre que el determinante de la inversa de una matriz A es igual al recíproco del determinante de la matriz A , es decir:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ con } \det(A) \neq 0$$

Ejercicio 19. Muestre con un ejemplo que la propiedad $|A + B| = |A| + |B|$ no se cumple para cualquier par de matrices.

5.9. Si una línea de una matriz A es la suma de m elementos, el determinante de A puede escribirse como la suma de m determinantes.

Ejemplo


$$\begin{vmatrix} 1+3 & 1 & 2 \\ -1+4 & 0 & 2 \\ 5+2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 9 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 20. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix} = -3$ y $\begin{vmatrix} d & e & f \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -5$, halle el valor de:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a+d & b+e & c+f \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

5.10. Si se suman los productos entre los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela, se obtiene como resultado 0.


Ejercicio 21. Calcule $\sum_{i=1}^4 a_{i2} \cdot C_{i3}$ para la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



DETERMINANTES
PARTE 2: PROPIEDADES.

Ingresa al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Propiedades de los determinantes.](#)



SCAN ME

6. REGLA DE CHÍO

La Regla de Chío es una sistematización de anulación de elementos por combinaciones lineales. Ésta permite reducir sistemáticamente el orden de un determinante en una unidad, y se aplica de la siguiente manera: (lo asumiremos sin demostrarlo)

- Se elige un 1 del determinante, y se distingue su posición ij . En caso de no haber un 1 en el determinante, se puede obtener aplicando la propiedad 5.3.
- Luego, se obtiene el determinante de orden $n - 1$ suprimiendo la fila y la columna que ocupa el 1. Cada elemento que no está en estas líneas se sustituye por la resta entre el elemento que ocupaba el lugar en la matriz original, y el producto de los elementos que se encuentran en las intersecciones de la fila y columna del elemento con la columna y fila del 1.
- Al determinante anterior, se lo multiplica por $(-1)^{i+j}$ y se obtiene así, el determinante de la matriz original.

Ejemplo

Supongamos que se quiere calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 - (0 \cdot 2) & 3 - (0 \cdot 0) & 1 - [0 \cdot (-1)] \\ 2 - (1 \cdot 2) & 2 - (1 \cdot 0) & -1 - [1 \cdot (-1)] \\ 1 - (0 \cdot 2) & 2 - (0 \cdot 0) & 1 - [0 \cdot (-1)] \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 22. Calcule los siguientes determinantes aplicando la regla de Chío:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$

Ejercicio 23. Pruebe que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

7. MATRIZ INVERSA

En la unidad anterior, definimos matriz inversa de A como aquella matriz que multiplicada por A a izquierda y derecha da como resultado la matriz identidad \mathbb{I} . La anotamos A^{-1} . Entonces:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}$$

A continuación, estudiaremos el *teorema sobre la existencia de la matriz inversa* a partir de su determinante.

En primer lugar, realizaremos una distinción en lo que se denomina matriz de adjuntos o *matriz de cofactores* (y que simbolizaremos $\text{cof}(A)$) y *matriz adjunta* (que simbolizaremos $\text{adj}(A)$).

Dada $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n , se llama *matriz de cofactores* de A y se escribe $\text{cof}(A)$ a la matriz formada por los cofactores de cada elemento correspondientes en la matriz A ; es decir $\text{cof}(A) = [C_{ij}]$.

Dada $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n , y conocida su matriz de cofactores $\text{cof}(A)$ se llama *matriz adjunta* de A y se escribe $\text{adj}(A)$ a la matriz traspuesta de $\text{cof}(A)$; es decir $\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^t$.

Ejercicio 24. Halle las matrices $\text{cof}(A)$ y $\text{adj}(A)$ de:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Condición suficiente para la existencia de la matriz inversa:

Dada una matriz A de orden n :

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

Lo cual significa que, si una matriz es *regular*, entonces admite inversa y se calcula de la forma indicada.

Ejercicio 25. Demuestre la condición anterior, considerando lo siguiente: (*)

- Plantear el producto entre la matriz y su matriz adjunta.
- Utilizar la regla de Laplace y la propiedad 5.10 para simplificar la expresión obtenida.
- Considerar el producto de un escalar y una matriz, para expresar el resultado anterior de otra manera.
- Utilizar la hipótesis, para demostrar la tesis.

Ejercicio 26. Calcule las matrices inversas de las matrices del ejercicio 24, si las admiten.

Ejercicio 27. Halle los valores de k para los cuales la matriz A no posee inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 28. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- Estudie para qué valores de λ existe la inversa.
- Calcule A^{-1} para $\lambda = 0$.

Ejercicio 29. Aplicando el método de la matriz adjunta, calcule la inversa de las siguientes matrices, si existen:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$



Ingresa al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Regla de Chío y Matriz Inversa.](#)



8. ECUACIONES MATRICIALES

Una ecuación matricial es una ecuación cuya incógnita es una matriz X . Existen varias formas de resolverlas, pero aquí lo haremos a través de la matriz inversa.

Ejemplo: Queremos hallar X en la expresión $A \cdot X + 3X = -BX + A^t$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, debemos explicitar a la matriz X desde la ecuación matricial dada. Si bien el procedimiento es similar al que se utiliza para resolver ecuaciones de números reales, en este caso, se requiere tener ciertos recaudos que no se consideran en una ecuación ordinaria. Se mencionarán a medida que se desarrolla el ejemplo:

$$A \cdot X + 3X = -BX + A^t$$

Como la idea es despejar la matriz X , parece lógico agrupar todos los términos que tengan el factor X en uno solo de los miembros. Sumando miembro a miembro el opuesto de la matriz $-BX$ resulta:

$$BX + (A \cdot X + 3X) = BX + (-BX + A^t) \Leftrightarrow BX + A \cdot X + 3X = \mathbb{O} + A^t \text{ donde } \mathbb{O} \text{ es la matriz nula.}$$

$$BX + A \cdot X + 3X = A^t, \text{ porque } \mathbb{O} \text{ es el elemento neutro de la suma.}$$

Ahora, extraemos a X como un “factor común” entre las matrices del primer miembro. Pero ojo, no podemos escribir a X deliberadamente en la izquierda o derecha de la expresión, debido a que el producto entre matrices no es conmutativo. Entonces deberemos extraerla como factor común hacia el lado en el que esté multiplicada, en este caso hacia la derecha.

$$(\dots + \dots + \dots) \cdot X = A^t$$

Ahora bien, parece lógico pensar que quiénes ocupan los dos primeros lugares en los términos entre los paréntesis son las matrices B y A : $(B + A + 3) \cdot X = A^t$

Y también es muy común creer que el tercer término debe ser el 3 que aparece en la ecuación. Es decir, quedaría $(B + A + 3) \cdot X = A^t$. Pero la expresión $B + A + 3$ no tiene sentido porque se está sumando un número a una matriz. Por eso, se debe proceder de la siguiente manera:

Ya que \mathbb{I} (matriz identidad) es el elemento neutro del producto entre matrices, entonces X puede escribirse como $\mathbb{I} \cdot X$ o $X \cdot \mathbb{I}$ según convenga. Luego, volviendo a la ecuación:

$$BX + A \cdot X + 3 \cdot \mathbb{I} \cdot X = A^t \Leftrightarrow (B + A + 3\mathbb{I}) \cdot X = A^t$$

Finalmente, para despejar la X debemos deshacernos del factor $B + A + 3\mathbb{I}$ del primer miembro. En una ecuación ordinaria de números reales, dividiríamos todo por el valor $B + A + 3\mathbb{I}$. Pero la operación “división” entre matrices no se haya definida. Por lo que pensemos lo siguiente: Sabemos, por definición que $Y \cdot Y^{-1} = Y^{-1} \cdot Y = I$, siendo Y^{-1} la matriz inversa de Y .

Si premultiplicamos a toda la ecuación por la inversa $(B + A + 3\mathbb{I})^{-1}$ nos queda:

$$(B + A + 3\mathbb{I})^{-1} \cdot (B + A + 3\mathbb{I}) \cdot X = (B + A + 3\mathbb{I})^{-1} \cdot A^t, \text{ siempre y cuando exista } (B + A + 3\mathbb{I})^{-1}$$

es decir, solamente si $|B + A + 3\mathbb{I}| \neq 0$.

$$\text{Luego, por definición de inversa, } \mathbb{I} \cdot X = (B + A + 3\mathbb{I})^{-1} \cdot A^t$$

Y finalmente, como $\mathbb{I} \cdot X = X$, $X = (B + A + 3\mathbb{I})^{-1} \cdot A^t$ que era lo que se buscaba realizar.

Observación: Para realizar un ejercicio práctico, directamente podemos omitir varios de los pasos anteriores y operar indicando la condición de existencia.

Ejercicio 30. Explícite X en las siguientes ecuaciones. En los casos en los que sea posible, obtenga la matriz X sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- | | |
|-------------------|---------------------------------|
| a) $XA^{-1} = BA$ | e) $XA^t + B^t = (AB)^t$ |
| b) $2AXAB = AB$ | f) $AXA + AB = C$ |
| c) $AX + XB = AB$ | g) $A(X + B) = CX$ |
| d) $XA + 3X = AB$ | h) $AXB - 2\mathbb{I} = XA + C$ |

Ejercicio 31. Obtenga la matriz X que verifica: $2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

9. RANGO DE UNA MATRIZ

Repasamos previamente el concepto de independencia lineal, visto anteriormente.

Un conjunto $V = \{\bar{u}_1; \bar{u}_2; \dots; \bar{u}_n\}$ de vectores se dice *linealmente independiente* si y sólo si, la **única manera** de poder escribir $\bar{0} = \alpha_1 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{u}_n$ es tomando todos los $\alpha_i = 0$. De lo contrario, el conjunto es *linealmente dependiente*.

Ejemplos

- El conjunto $V = \{\bar{a} \rightarrow (-1; 3; 1); \bar{b} \rightarrow (-4; 0; -2)\}$ es linealmente independiente, pues:

$$\alpha_1 \cdot (-1; 3; 1) + \alpha_2 \cdot (-4; 0; -2) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow (-\alpha_1; 3\alpha_1; \alpha_1) + (-4\alpha_2; 0; -2\alpha_2) = (0; 0; 0)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{Cuya única solución es } \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

- En cambio, el conjunto $A = \{\bar{u} \rightarrow (2; -4); \bar{v} \rightarrow (-6; 12)\}$ es linealmente dependiente, porque $\alpha_1 \cdot (2; -4) + \alpha_2 \cdot (-6; 12) = (0; 0)$ si bien puede lograrse tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, también puede lograrse considerando, por ejemplo $\alpha_1 = 3 \wedge \alpha_2 = 1$.
- Un conjunto que contenga al vector nulo, siempre es linealmente dependiente. ¿Por qué?

Dada una matriz A de orden $m \times n$, llamamos rango de A y se indica $rg(A)$ al número máximo de vectores fila (o columna) que forman un conjunto linealmente independiente. Siempre ocurre que $0 \leq rg(A) \leq \min\{m; n\}$.

Ejemplos

- La matriz $V = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ya que demostramos en los ejemplos anteriores que sus dos vectores conforman un conjunto linealmente independiente.
- La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ no tiene rango 2, ya que sus dos vectores no son linealmente independientes.

Puede demostrarse que al menos uno solo de ellos conforma un conjunto linealmente independiente, por lo que $rg(A) = 1$.

- La matriz nula N sea del orden cual fuere, siempre tiene rango 0. ¿Por qué?

En clase se desarrollará el método práctico para hallar el rango de una matriz.

Ejercicio 32. Calcule el rango de las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$



UNIDAD 3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

UNIDAD 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. INTRODUCCIÓN

Se llama *ecuación lineal* o *ecuación de primer grado*, a la que vincula ciertos números reales o complejos con una o más incógnitas que aparecen elevadas a la primera potencia, sin que haya producto entre dos o más de ellas:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + C = 0$$

O bien, $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

El problema consiste en hallar el conjunto de valores $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ que la verifican. A este conjunto se lo llama *solución de la ecuación* o *conjunto de validez*.

Anteriormente hemos estudiado expresiones como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

conocido como sistema de ecuaciones de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y aprendimos algunos métodos para hallar sus soluciones: método de los determinantes, método de sustitución, método de igualación, etc.

Ejercicio 1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones de dos por dos con alguno de los métodos que conozca:

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2y = 2x - 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2y = 2x - 4 \end{cases}$

¿Qué sucede si en lugar de ser dos ecuaciones, se tratan de más ecuaciones, digamos m ecuaciones?
 ¿Y si en lugar de ser dos incógnitas, se trata de n incógnitas?

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales que se verifican simultáneamente. Su notación es:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

El subíndice m representa la cantidad de ecuaciones lineales que intervienen en el sistema. El subíndice n representa la cantidad de incógnitas que intervienen en el sistema: $x_1; x_2; \dots; x_n$.

Un sistema de ecuaciones también puede escribirse utilizando una notación matricial, como un producto entre matrices:

$$S: A.X = B$$

En donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
 es una matriz de orden $m \times n$ llamada *matriz de los coeficientes*.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
 es una matriz columna, de orden $n \times 1$ llamada *matriz de las incógnitas*.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
 es una matriz columna, de orden $m \times 1$ llamada *matriz de los términos independientes*.

Puede notarse entonces que:

$$\begin{array}{cccc|c}
 & & & & x_1 \\
 & & & & x_2 \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & x_n \\
 \hline
 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{cases}$$

Notar que en un sistema de ecuaciones lineales S , a_{ij} representa el coeficiente de la ecuación i -ésima que acompaña a la incógnita x_j y b_i es el término independiente de la ecuación i -ésima.

Entonces, dados los números a_{ij} y b_i , el sentido del problema es:

¿Existen valores de las x_j que verifiquen las ecuaciones del sistema? Si existen, ¿cuántas soluciones son? Y estas últimas, ¿cómo se determinan?

3. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES DE ACUERDO CON SUS SOLUCIONES

Un sistema puede tener o no tener soluciones. En tal caso se llamará *compatible* o *incompatible*, respectivamente. Además, si es compatible puede tener una única solución (en tal caso se llama compatible *determinado*) o infinitas soluciones (compatible *indeterminado*)

Ejemplos

- El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ tiene como única solución al par $(2; 1)$. Por lo tanto, es compatible determinado.

- El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

Algunas de ellas son (2; 1) (3; 2); (-3; -4); etc. Por lo tanto, es compatible indeterminado.

- El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ no tiene soluciones y por lo tanto es incompatible.

4. TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, que puede escribirse matricialmente como $A \cdot X = B$, donde

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
 es la matriz de los coeficientes, y

$$A'_{m \times (n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$
 se llama *matriz ampliada*, que se obtiene a partir de A .

$$S \text{ tiene solución} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A')$$

$$S \text{ no tiene solución} \Leftrightarrow \text{rg}(A) \neq \text{rg}(A')$$

Si un sistema tiene solución se dice que es *compatible*, en caso contrario se dice *incompatible*.

Además, el teorema plantea que si:

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = n \Leftrightarrow S$ tiene única solución.	Compatible determinado
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A') < n \Leftrightarrow S$ tiene infinitas soluciones.	Compatible indeterminado
$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A') \Leftrightarrow S$ no tiene solución.	Incompatible

Ejercicio 2. Determine si los siguientes sistemas tiene o no solución aplicando el teorema visto:

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x + 2y = -1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 4 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$

5. SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Solamente veremos el método de eliminación de Gauss y a lo sumo ecuaciones con tres variables para poder interpretarlas.

Ejemplo

Analicemos si el siguiente sistema tiene solución y en dicho caso hallémosla.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

ÁLGEBRA 2

Calculamos los rangos: Como $|A| \neq 0$ entonces el $rg(A) = rg(A') = n$ (porque no puede ser cuatro el rango de la matriz ampliada). Luego, el sistema es compatible determinado.

Para hallar la única terna $(x; y; z)$ que verifica las tres ecuaciones del sistema, haremos el siguiente esquema práctico.

La esquematización que veremos surge del método de *eliminación de variables* que permite trabajar con un sistema equivalente al original (tienen iguales soluciones) pero en el que es resulta más sencillo el cálculo de estas.

1º paso: Armamos un cuadro con la matriz de los coeficientes y separamos mediante una línea, la columna de los términos independientes.

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5

2º paso: Debajo de este cuadro se repite la primera fila y se colocan todos ceros debajo del elemento a_{11} .

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5
1	2	-2	0
0			
0			

3º paso: Los elementos de la segunda fila distintos de a_{21} , son los determinantes de orden dos cuyos elementos se muestran en círculos y así análogamente para la tercera fila.

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5
1	2	-2	0
0	-5	5	5
0	-1	2	5

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5$

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5

x	y	z	$T.I.$
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5$

4º paso: Se repiten los pasos anteriores, pero ahora copiando primera y segunda fila del paso anterior y colocando cero debajo del elemento a_{22} .

x	y	z	T.I.
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5
<hr/>			
1	2	-2	0
0	-5	5	5
0	-1	2	5
<hr/>			
1	2	-2	0
0	-5	5	5
0	0	-5	-20

x	y	z	T.I.
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5
<hr/>			
1	2	-2	0
0	-5	5	5
0	-1	2	5

x	y	z	T.I.
1	2	-2	0
3	1	-1	5
2	3	-2	5
<hr/>			
1	2	-2	0
0	-5	5	5
0	-1	2	5

$$\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20$$

El sistema original es equivalente al que armamos con el último cuadro:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ -5y + 5z = 5 \\ -5z = -20 \end{cases}$$

Pero en este último los cálculos son más sencillos ya que de la tercera ecuación obtenemos:

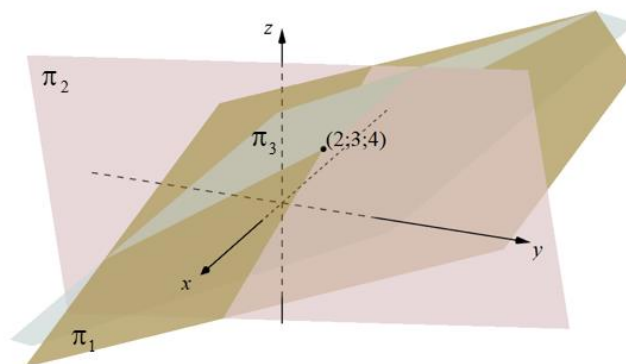
$$-5z = -20 \Leftrightarrow z = 4$$

y luego con ese valor podemos utilizar la ecuación inmediata de arriba

$$-5y + 5z = 5 \Leftrightarrow -5y + 20 = 5 \Leftrightarrow y = 3$$

Para hallar la variable x utilizamos la primera ecuación del sistema con los datos ya obtenidos y resulta $x = 2$.

Luego, la solución del sistema es $S = \{(2; 3; 4)\}$. Geométricamente se trata de tres planos que se cortan en un punto: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{(2; 3; 4)\}$



Ejemplo: Encontrar la solución del siguiente sistema compatible e interpretarlo geoméricamente:

$$S) \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - 4y + 6z = 3 \end{cases}$$

Aplicando el método visto, resulta:

x	y	z	$T.I.$
2	-1	1	2
3	2	-4	1
1	-4	6	3
2	-1	1	2
0	7	-11	-4
0	-7	11	4
2	-1	1	2
0	7	-11	-4
0	0	0	0

Notemos lo siguiente: De la última ecuación $0 \cdot z = 0$, cuya solución es $z \in \mathbb{R}$. Por lo que podemos designar $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

De la segunda ecuación: $7y - 11t = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{7} + \frac{11}{7}t$

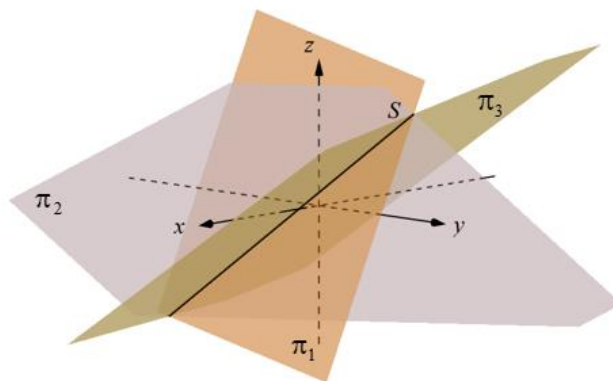
Reemplazando en la primera ecuación: $2x - \left(-\frac{4}{7} + \frac{11}{7}t\right) + t = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{7} + \frac{2}{7}t$

Luego, la solución del sistema $S = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x = \frac{5}{7} + \frac{2}{7}t \wedge y = -\frac{4}{7} + \frac{11}{7}t \wedge z = t; t \in \mathbb{R}\}$

Geoméricamente se trata de tres planos que se cortan en la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = \frac{5}{7} + \frac{2}{7}t \\ y = -\frac{4}{7} + \frac{11}{7}t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Es decir, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$



Ejercicio 3. Determine el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones del ejercicio 2 que resultaron ser compatibles.

Ejercicio 4. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, se pide:

- Aplice el Teorema de Rouché Frobenius para determinar si admite solución. Concluir.
- Resuélvalo en caso de que sea posible.
- Interprete geoméricamente aquéllos que sean de dos incógnitas.

$$S_1: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ x - z = 4 \end{cases}$$

$$S_3: \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$S_4: \begin{cases} A + B + C = 18 \\ 2A - B = 0 \\ 2A + 3B + 5C = 62 \end{cases}$$

$$S_5: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

$$S_6: \begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$S_7: \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$S_8: \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ a - b + c + d = 1 \\ a + d = 2 \\ a + b + 3c - d = 1 \end{cases}$$

$$S_9: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x - y = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Dado el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

el sistema recibe el nombre de *homogéneo* si $c = f = 0$. Demuestre que un sistema homogéneo es siempre compatible.

Ejercicio 6. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas:

a) Para que el sistema $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ kx - 3y = 0 \end{cases}$ tenga solución, basta con que $k \in \mathbb{R}$.

b) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -2y + 2z = -1 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 7. Halle los valores de m para que el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = m^2 - 1 \\ my + z = m \\ x + y - mz = 0 \end{cases}$$

sea:

- a) Compatible determinado
- b) Compatible indeterminado
- c) Incompatible.

Ejercicio 8. Dado el siguiente sistema de ecuaciones, analice utilizando el Teorema de Rouché para qué valores de k el mismo es indeterminado.

$$S: \begin{cases} kx + y + 2z = 1 \\ ky - 3z = 0 \\ 4x + 5y - z = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 9. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, halle:

a) la matriz $(A^t + B^t)^{-1}$ si existiera.

b) el o los valores de k para que el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$ tenga como interpretación geométrica dos rectas paralelas, justificando mediante la aplicación del Teorema de Rouché-Frobenius.

Ejercicio 10. Dado el sistema de ecuaciones expresado por la ecuación matricial $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Estudie la posible resolución del sistema mediante el Teorema de Rouché.
- Resuélvalo, si es posible e interprételo geoméricamente.

Ejercicio 11. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y - kz = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 4x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$$

- Halle k para que el sistema tenga infinitas soluciones. Interpretar geoméricamente.
- Resuélvalo aplicando el método conveniente considerando $k = 0$.

Ejercicio 12. ¿Para qué valores de k el siguiente sistema es incompatible? Justifique.

$$\begin{cases} 2x - y + k = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ kx + y - z = 0 \end{cases}$$



EJERCICIOS INTEGRADORES
UNIDADES 1, 2, 3
MATRICES
DETERMINANTES
SEL

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

Ejercicio 1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta dada en cada caso.

a) El valor $m = -1$ hace que la siguiente matriz tenga rango 1:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

b) Todas las matrices cuadradas admiten inversa.

c) $|A| = -|A^t|$

d) Dado el determinante de A igual a 4, el determinante de B es 24.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c & 2d \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \\ 3e & 3f & 3g & 3h \end{pmatrix}$$

e) En $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el determinante de la matriz menor de a_{21} es igual al adjunto de a_{21} .

f) La matriz identidad de orden 3, tiene rango 3.

Ejercicio 2. Escriba, si es posible:

- a) Una matriz cuadrada de orden 4 con rango 2.
- b) Una matriz de orden 3×4 de rango 3.
- c) Una matriz de orden 4×3 de rango 4.
- d) Una matriz cuadrada de orden 5 y rango 4 con dos filas de ceros.

Si no es posible, explicar detalladamente por qué.

Ejercicio 3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Determine C tal que $A \cdot C = C \cdot A = I$
- b) Halle $\det(B)$

Ejercicio 4. Determine el o los valores de a para que el conjunto de vectores filas de la siguiente matriz sea un conjunto linealmente independiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ a & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Explicite a la matriz incógnita X en caso de que sea posible:

- a) $A \cdot X + 3X = B + A^t$ c) $A \cdot X + XB = B + A^t$
 b) $AX + AXB = B$ d) $AX - X \cdot 2 = BX + A$

Ejercicio 6. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -k & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando todas las respuestas:

- a) Determine el conjunto de valores de α para los cuáles la matriz A admite inversa.
 b) Halle la matriz inversa de A cuando $\alpha = 1$.
 c) Determine el rango de la matriz B .

Ejercicio 7. Analice las posibles soluciones del siguiente sistema aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius. En caso de ser compatible, halle la solución y dé la interpretación geométrica:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 8. Determine para qué valores de t , el siguiente sistema es incompatible, justificando la respuesta.

$$S: \begin{cases} x + y + z + v + w = 0 \\ x - y + 2z - v + w = 0 \\ x + y + z - (t - 1)v - w = 0 \\ x + 2y + z - v - w = 0 \\ x + y - z - v - w = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 9. Un determinado sector de una empresa produce piezas A , B y C . Por una política de usos de las máquinas, el sector debe producir exactamente 18 piezas por hora. Los artículos A y B son complementarios, teniendo que producirse el doble de piezas de B respecto de las de A . El costo de producir cada pieza A , B y C es de 2, 3 y 5 dólares, respectivamente, y el sector cuenta con un presupuesto fijo de 62 dólares para producir por hora.

- a) Utilizando el Teorema de Rouché-Frobenius, demuestre que el sector tiene una única alternativa de producción.
 b) Encuentre la cantidad de piezas de cada tipo que debe producir el sector por hora.

Ejercicio 10. Sea el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = a \\ 2x + 3y = a \end{cases}$$

Determine para qué valores de a y b el sistema resulta:

Ejercicio 16. Halle el valor de a para que el siguiente determinante sea nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & a & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 17. Explícite X en las siguientes ecuaciones matriciales, si es posible:

- a) $X \cdot A^{-1} = C \cdot A$
- b) $A \cdot X + X \cdot B = C + D$
- c) $X \cdot A + 3 \cdot X = A \cdot B$

Ejercicio 18. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, se pide:

- a) Aplique el teorema de Rouché Frobenius para determinar si admiten solución. Concluir.
- b) Resuélvalos aplicando Gauss, en caso de que sea posible.

$$A: \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 2y + z = 6 \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \\ x + y + 2z = 8 \end{cases}$$

Ejercicio 19. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas:

- a) Dada una matriz A de orden 2×3 existe una matriz P de orden 2×3 tal que $A + P = A$.
- b) El determinante de la matriz identidad de 3×3 es nulo.
- c) Si puede realizarse la operación $A + B$, también puede realizarse $B + A$.
- d) Si un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, se dice que el mismo es *incompatible*.
- e) Se puede realizar la división $7: (|A| - |A^t|)$.
- f) En la ecuación matricial $AX + 3X = B$, puede despejarse X y vale $X = (A + 3) \cdot B$
- g) Si A es de orden $m \times n$ y B es de orden $n \times m$, entonces tanto $A \cdot B$ y $B \cdot A$ se pueden realizar y los resultados son matrices cuadradas.

Ejercicio 20. Halle el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

Ejercicio 21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Para determinar si la misma posee inversa, existe una condición suficiente. ¿Cuál es dicha condición? Pruebe que esta matriz admite inversa y *hállela*.
- b) Escriba a la matriz identidad y la matriz nula del mismo orden que A .
- c) Determine si es posible realizar la operación $A \cdot B$ sabiendo que el orden de B es 3×4 .
- d) A rango tiene 3. Modifique una línea de A para que su rango sea 2. Justificar. La línea modificada no puede contener todos ceros.



UNIDAD 4 NOCIONES DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

UNIDAD 4. NOCIONES DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1. LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA

1.1. DEFINICIÓN

Sea A un conjunto no vacío, la operación $*$ se llama *ley de composición interna* en A si y solo si:

$$a \in A \wedge b \in A \Rightarrow (a * b) \in A$$

Expresado de otra manera, $*$ es una ley de composición interna si es una *función* de la forma:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (a; b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

Las definiciones anteriores significan que al operar con dos elementos genéricos del conjunto A , el resultado de la operación también pertenece a A .

Ejemplos

- 1) La suma usual $+$ es una ley de composición interna en \mathbb{Z} .
- 2) El producto \cdot es una ley de composición interna en \mathbb{C} .
- 3) Se define en reales la operación $*$ en \mathbb{R} : $a * b = a \cdot b + 2$. $*$ es una ley de composición interna en \mathbb{R} .
- 4) Sea A un conjunto, se llama conjunto de partes o potencia de A y se indica $P(A)$ al conjunto $P(A) = \{X/X \subseteq A\}$. La operación \cup es una ley de composición interna en $P(A)$.

Observaciones:

- $*$ también recibe el nombre de *operación binaria en A* .
- Se puede expresar además que $*$ es *cerrada en A* .
- Existen varias notaciones para la imagen de $(a; b) \in A \times A$ bajo una operación binaria:

$$\begin{aligned} &a \cdot b \text{ (notación multiplicativa),} \\ &a + b \text{ (notación aditiva),} \\ &a * b, \\ &a \circ b, \\ &a \otimes b, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Explique por qué la adición es una ley de composición interna en \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} .

Ejercicio 2. Explique por qué la multiplicación es una ley de composición interna en \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} .

Ejercicio 3. Sea \otimes definida en \mathbb{Z} por $x \otimes y = x + y - xy$, pruebe que la misma es una ley de composición interna en \mathbb{Z} . ¿Lo es en \mathbb{N} ?

Ejercicio 4. Analice si las operaciones intersección y unión entre conjuntos son leyes de composición interna para el conjunto de partes de $A = \{a; b; c\}$.

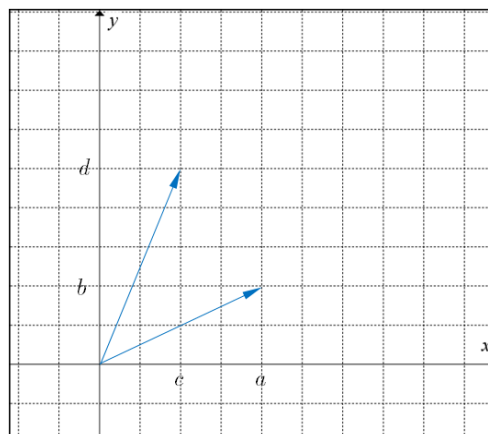
Ejercicio 5. Analice si las operaciones suma y producto entre conjuntos son leyes de composición interna para el conjunto $A = \{x/x = a^n, \text{ con } n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } \text{cte} = a > 0\}$.

Ejercicio 6. Considere la operación composición de movimientos \circ para las rotaciones del triángulo equilátero respecto del baricentro, y analice si se trata o no de una ley de composición interna.

Ejercicio 7. Analice si las operaciones suma y producto entre conjuntos son leyes de composición interna para el conjunto $P_2 = \{p(x)/p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$, con $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0; 1; 2$.

Ejercicio 8. Analice si el producto usual es una ley de composición interna en el conjunto $\{1; i; -1; -i\}$.

Ejercicio 9. En \mathbb{R}^2 , la operación suma de vectores posición es una ley de composición interna. Encuentre la imagen de $(a; b) + (c; d)$ en la siguiente figura, e interprete geoméricamente el valor de la imagen de dos pares cualesquiera:



Ejercicio 10. Se tiene el conjunto:

$$A = \left\{ H \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) / H = \begin{pmatrix} h & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Estudie si la suma y el producto entre matrices es una ley de composición interna en A .

1.2. UNIFORMIDAD

Sea $*$ una ley de composición interna en un conjunto A entonces:

$$a = b \Rightarrow a * c = b * c \quad \text{y} \quad a = b \Rightarrow c * a = c * b$$



Propiedad

$$a = b \Rightarrow a * c = b * c$$

Demostración

$$a = b \Rightarrow (a; c) = (b; c) \Rightarrow * (a; c) = * (b; c) \Rightarrow a * c = b * c$$

La segunda igualdad tiene una demostración análoga. Esta propiedad es de especial importancia la justificación de propiedades y teoremas que se desarrollarán más adelante.

	<p>Ingresa al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:</p> <p>Ley de composición interna. Uniformidad.</p>	
---	---	---

1.3. PROPIEDADES DE LAS LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA

1.3.1. ASOCIATIVIDAD

Sea $*$ una ley de composición interna en A diremos que $*$ es *asociativa* si y solo si:

$$\forall a, b, c \in A: (a * b) * c = a * (b * c)$$

Ejemplos

5) La suma usual $+$ es una ley de composición interna asociativa en \mathbb{Z} .

6) La operación $*$ definida por $a * b = a \cdot b + b$ es una ley de composición interna en \mathbb{R} . ¿Es asociativa?

Consideremos tres elementos genéricos del conjunto \mathbb{R} : a, b, c . ¿Es $(a * b) * c = a * (b * c)$?

Por un lado: $(a * b) * c = (a \cdot b + b) * c = (a \cdot b + b) \cdot c + c = a \cdot b \cdot c + b \cdot c + c$

Por el otro: $a * (b * c) = a * (b \cdot c + c) = a \cdot (b \cdot c + c) + (b \cdot c + c) = a \cdot b \cdot c + a \cdot c + b \cdot c + c$

Daremos respuesta negativa a la pregunta que nos habíamos hecho originalmente.

Ejercicio 11. Sea $*$ definida en \mathbb{R} por $a * b = a + 2b$, determine si $*$ es una ley de composición interna asociativa en \mathbb{R} .

Ejercicio 12. Dado un conjunto A , puede demostrarse que las operaciones \cup e \cap son leyes de composiciones internas en el conjunto de partes o potencia de A . ¿Son asociativas? Analícelo para un conjunto $A = \{x\}$

1.3.2. CONMUTATIVIDAD

Sea $*$ una ley de composición interna en A diremos que $*$ es *conmutativa* si y solo para todo par de elementos a, b del conjunto A se cumple:

$$a * b = b * a$$

Ejemplos

7) La suma usual $+$ en \mathbb{Z} es conmutativa pues $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

8) La operación interna \circ definida por $(a; b) \circ (c; d) = (a + c - 3; b + d)$ en \mathbb{R}^2 es conmutativa. En efecto:

$$(a; b) \circ (c; d) = (a + c - 3; b + d) = (c + a - 3; d + b) = (c; d) \circ (a; b)$$

Ejercicio 13. Determine, justificando la respuesta, cuáles de las siguientes operaciones son conmutativas en el conjunto correspondiente:

- a) la potenciación en \mathbb{N} .
- b) la adición en \mathbb{R} .
- c) la multiplicación en \mathbb{R} .
- d) la unión de conjuntos \cup en $P(A)$.

Ejercicio 14. Sea $*$ definida en \mathbb{R} por $x * y = x + y + 2xy$ estudie si se trata de una operación conmutativa.

Ejercicio 15. Estudie si la aplicación $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $x * y = x + y + 6$ es conmutativa.

Ejercicio 16. ¿Es conmutativo el producto entre matrices cuadradas de orden dos? Justifique.

Ejercicio 17. Sea la operación \oplus : $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / (a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + bi$. ¿Se trata de una operación conmutativa? Justifique.

Ejercicio 18. Pruebe que la operación interna en \mathbb{R} definida por \circ : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / a \circ b = |a - b|$ es conmutativa.

Ejercicio 19. Analice si en el conjunto $A = \left\{ f(x) = x; g(x) = \frac{1}{x} \right\}$ la operación composición de funciones es conmutativa.

1.3.3. DISTRIBUTIVIDAD DE UNA LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA RESPECTO DE OTRA

Sean $*$ y \otimes dos leyes de composición interna en A diremos que $*$ es *distributiva respecto de* \otimes si y solo si para todo trío de elementos a, b, c del conjunto A se cumple:

$$a * (b \otimes c) = a * b \otimes a * c \quad \text{y} \quad (b \otimes c) * a = b * a \otimes c * a$$

Las anteriores igualdades se pueden leer *distributividad a izquierda* o *distributividad a derecha*, respectivamente.

Ejemplos

9) En \mathbb{Z} el producto usual es distributivo respecto de la suma, pues para cualquier terna de enteros se cumple $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

10) En el conjunto \mathbb{N} , la potencia no es distributiva a la suma, pues en general: $(a + b)^n \neq a^n + b^n$

11) En el conjunto \mathbb{N} , la potencia es distributiva a derecha respecto de la multiplicación porque sucede que $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, pero no lo es a izquierda $n^{a \cdot b} \neq n^a \cdot n^b$.

Ejercicio 20. Se definen en \mathbb{Z} las operaciones \oplus y $*$ mediante:



$$a \oplus b = a + b - 8 \qquad a * b = a + b - a \cdot b$$

Determine si $*$ es distributiva respecto de \oplus a izquierda y derecha.

Ejercicio 21. Se definen en \mathbb{R}^+ dos leyes de composición interna $*$ y \circ mediante:

$$a * b = b^a \qquad a \circ b = a \cdot b$$

Pruebe que $*$ es distributiva a la izquierda respecto de \circ , pero no lo es a derecha.

	<p>Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:</p> <p style="text-align: center; color: blue;"><i>Propiedades de una LCI.</i></p>	
---	--	---

1.4. ELEMENTOS DISTINGUIBLES DE LAS LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA

1.4.1. ELEMENTO NEUTRO O IDENTIDAD

Sea $*$ una ley de composición interna en A , el elemento e es *neutro* o *identidad* de $*$ si y solo si:

$$\exists e \in A / \forall a \in A: a * e = e * a = a$$

Ejemplos

12) El elemento neutro de la suma usual $+$ en \mathbb{Z} es el 0.

13) La operación \circ definida por $(a; b) \circ (c; d) = (a + c - 3; b + d)$ es una ley de composición interna en \mathbb{R}^2 . ¿Posee elemento neutro?

Asumamos que en efecto, tiene elemento neutro al que llamaremos $e = (e_1; e_2)$. Debería cumplirse entonces que $(a; b) \circ (e_1; e_2) = (a; b)$ y $(e_1; e_2) \circ (a; b) = (a; b)$ para cualquier $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (a; b) \circ (e_1; e_2) = (a; b) &\Rightarrow (a + e_1 - 3; b + e_2) = (a; b) \Rightarrow a + e_1 - 3 = a \wedge b + e_2 = b \\ &\Rightarrow (e_1; e_2) = (3; 0) \end{aligned}$$

Como en apariencia el elemento neutro es $(3; 0)$ lo probamos ubicándolo a la izquierda del elemento genérico:

$$(3; 0) \circ (a; b) = (3 + a - 3; 0 + b) = (a; b)$$

La conclusión es entonces, que la operación \circ posee neutro en \mathbb{R}^2 y es el par $(e_1; e_2) = (3; 0)$.

Nota: Si la operación es conmutativa, no es necesario analizar por izquierda y por derecha.

Propiedad

Sea $*$ una ley de composición interna en un conjunto A , si existe elemento neutro e , éste es único. (*)

Demostración

Supongamos que existen dos neutros: e_1 y e_2 .

Como e_1 es neutro, cualquier elemento compuesto con él da el mismo elemento. Es decir, $x * e_1 = e_1 * x = x$.

En particular, si $x = e_2$ entonces: $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ (1)

Ahora bien, si e_2 es neutro, cualquier elemento compuesto con él da el mismo elemento. Es decir, $x * e_2 = x$. En particular, si $x = e_1$: $e_1 * e_2 = e_1$ (2)

Comparando (1) con (2) arribamos a que necesariamente deben ser $e_1 = e_2$

Luego el neutro es único, que es lo que pretendíamos demostrar.

Ejercicio 22. Determine, justificando la respuesta, cuál es el elemento neutro para cada operación en el conjunto indicado:

- la adición en \mathbb{N} .
- la adición en \mathbb{R} .
- la multiplicación en \mathbb{N} .
- la multiplicación en \mathbb{R} .
- la unión de conjuntos \cup en $P(A)$.
- la suma en el conjunto de matrices.

Ejercicio 23. Sea $*$ definida en \mathbb{R} por $x * y = x + y + 2xy$ deduzca cuál es el elemento neutro.

Ejercicio 24. Estudie si la aplicación $*: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $x * y = x + y + 6$ posee elemento neutro.

Ejercicio 25. La operación \circ definida por $(a; b) \circ (c; d) = (a + c - 2; b - d)$ es una ley de composición interna en \mathbb{R}^2 . ¿Posee elemento neutro?

Ejercicio 26. Deduzca que el elemento neutro de la multiplicación para el conjunto de matrices cuadradas de dos por dos es la matriz identidad:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 27. La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x; y) = x + y^2$ es una ley de composición interna en \mathbb{R} . Pruebe que no posee elemento identidad.

1.4.2. ELEMENTO INVERSO O SIMÉTRICO

Sea $*$ una ley de composición interna en un conjunto A con elemento neutro e . Se dice que todo elemento $a \in A$ es inversible o posee *elemento inverso* si existe un $a' \in A$ tal que:

$$a * a' = a' * a = e$$

Ejemplos:

14) El inverso para la suma usual $+$ en \mathbb{Z} de un elemento x es $-x$ ya que $x + (-x) = (-x) + x = 0$. A este elemento se lo suele conocer con el nombre de *inverso aditivo* u *opuesto*.

15) La operación interna \circ definida por $(a; b) \circ (c; d) = (a + c - 3; b + d)$ posee neutro y ya habíamos investigado en el ejemplo 8 que era el par $(e_1; e_2) = (3; 0)$. Cabe preguntarse ahora si existen elementos del conjunto que sean invertibles.

Debemos plantear si existe un $a' = (a_1; a_2)$ tal que $(a_1; a_2) \circ (x; y) = (3; 0)$.

De lo anterior, resulta $(a_1 + x - 3; a_2 + y) = (3; 0)$.

Luego, $a_1 + x - 3 = 3 \Rightarrow a_1 = 6 - x$ y $a_2 + y = 0 \Rightarrow a_2 = -y$

Con lo cual, probamos que para un $(x; y)$ se verifica que existe $a' = (6 - x; -y)$ de manera que:

$$(6 - x; -y) \circ (x; y) = (6 - x + x - 3; -y + y) = (3; 0) = e$$

Si el elemento se encuentra a la derecha: $(x; y) \circ (6 - x; -y) = (x + 6 - x - 3; y - y) = e$

Notas:

- Si la operación es conmutativa, no es necesario analizar por izquierda y por derecha.
- Si la ley de composición interna es una ley aditiva, el elemento inverso recibe el nombre de *opuesto*.
- Si la ley de composición interna es una ley multiplicativa, el elemento inverso recibe el nombre de *recíproco*.

Propiedad

El inverso del inverso de un elemento, es el elemento original: $(a')' = a$ (*)

Demostración

Como a' es el inverso de a se verifica que $a * a' = e$.

Por definición de inverso, a debe ser el inverso de a' , es decir $(a')' = a$ y la propiedad queda demostrada.

Ejercicio 28. Determine, justificando la respuesta, cuál es el elemento inverso para cada operación en el conjunto indicado, y qué elementos del conjunto lo poseen:

- la adición en \mathbb{N} .
- la adición en \mathbb{R} .
- la multiplicación en \mathbb{N} .
- la multiplicación en \mathbb{R} .
- la unión de conjuntos \cup en $P(A)$.

Ejercicio 29. Sea $*$ definida en \mathbb{R} por $x * y = x + y + 2xy$ estudie los elementos inversos del conjunto.

Ejercicio 30. Estudie si el conjunto \mathbb{Z} con la aplicación $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $x * y = x + y + 6$ tiene elementos invertibles.

Ejercicio 31. ¿Qué matrices del conjunto de matrices cuadradas de dos por dos poseen elemento inverso? ¿qué forma tiene el mismo?

1.4.3. ELEMENTO REGULAR

Sea $*$ una ley de composición interna en un conjunto A , el elemento $a \in A$ es *regular* respecto de $*$ si y solo si:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \quad \text{y} \quad b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

La regularidad también puede analizarse parcialmente por izquierda y por derecha.

Si todos los elementos de un conjunto son regulares respecto de una ley de composición interna, se dice que vale la *ley cancelativa* para dicha operación en dicho conjunto.

Ejercicio 32. Sea $*$ definida en \mathbb{Q} por $x * y = x + y + xy$ pruebe que un elemento del conjunto no es regular, y el resto sí.

Ejercicio 33. Sea $A = \{x = a + b \cdot \sqrt{2} / a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$. Estudie la regularidad de sus elementos respecto de la multiplicación usual.

Ejercicio 34. Analice la regularidad en el producto de matrices cuadradas de orden dos.



Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Elementos distinguibles de una LCI.](#)



2. LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, la operación $*$ se llama *ley de composición externa* por la derecha si y solo si:

$$a \in A \quad \wedge \quad b \in B \quad \Rightarrow \quad (a * b) \in A$$

De manera análoga se define ley de composición externa por la izquierda.

Ejercicio 35. Realice el producto escalar $(2; 1; -2) \cdot (2\vec{j} + 3\vec{i} + \vec{k})$.

¿Es dicha operación una ley de composición interna, externa o ninguna de ellas? Justifique.

Nota: Algunos autores utilizan la simbología “ \cdot ” para denotar al producto escalar.

Ejercicio 36. Explique por qué las siguientes aplicaciones son leyes de composición externa para los conjuntos indicados:

a) $\cdot: \mathbb{R} \times \vec{V} \rightarrow \vec{V} / (\alpha; \vec{u}) \mapsto \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$

b) $\cdot: \mathbb{R} \times F \rightarrow F / (\alpha; f) \mapsto (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

3. NOCIONES DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Dado un conjunto $G \neq \emptyset$ y las leyes de composición $*$, \otimes, \dots, \circ (internas o externas) definidas en él de manera que se cumplen una serie de propiedades, diremos que $(G; *; \otimes; \dots; \circ)$ es una *estructura algebraica*.

3.1. SEMIGRUPO

Dado un conjunto no vacío G y una ley de composición interna $*$ definida en G diremos que $(G; *)$ es un *semigrupo* si y solo si $*$ es asociativa en G .

Ejemplos

16) $(\mathbb{Z}; +)$ es un semigrupo.

17) Si $*$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} / a * b = a^b$ entonces $(\mathbb{N}; *)$ no es semigrupo. ¿por qué?

3.2. MONOIDE

Sea $(G; *)$ es un semigrupo diremos que $(G; *)$ es un *monoide* si y solo si posee elemento neutro o identidad e .

Ejemplos:

18) $(\mathbb{Z}; +)$ es un monoide.

19) $(\mathbb{N}; +)$ es un semigrupo, pero no monoide.

3.3. GRUPO

Sea $(G; *)$ es un monoide diremos que $(G; *)$ es un *grupo* si y solo si cada elemento $a \in G$ posee elemento inverso a' .

Ejemplos

20) $(\mathbb{Z}; +)$ es un grupo.

21) $(\mathbb{Z}; \cdot)$ no es un grupo.

22) $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$ es un grupo.

23) Cualquier conjunto de la forma $G = \{e\}$ es un grupo y se llama *grupo trivial*.

Propiedades de los grupos

a) Unicidad del elemento neutro: Estudiado y demostrado en la unidad anterior.

b) Unicidad del elemento inverso:

Propiedad

Sea $(G; *)$ un grupo, si $a \in G$ tiene inverso $a' \in G$, éste es único. (*)

Demostración

Supongamos que existen dos inversos de a : a' y a'' .

$$\begin{aligned}
 a' &= \\
 \text{Por definición de neutro:} &= a' * e \\
 \text{Como } a'' \text{ es inverso de } a: &= a' * (a * a'') \\
 \text{Por asociatividad:} &= (a' * a) * a'' \\
 \text{Como } a' \text{ es inverso de } a: &= e * a'' \\
 \text{Por definición de neutro:} &= a''
 \end{aligned}$$

Luego $a' = a''$ y entonces el inverso de a es único.

c) Regularidad

Propiedad

Todos los elementos de un grupo son regulares: $\begin{cases} a * b = a * c \Rightarrow b = c \\ b * a = c * a \Rightarrow b = c \end{cases}$

Demostración

Trabajaremos la expresión $a * b = a * c$.

$$\begin{aligned}
 \text{Componiendo a la izquierda con } a': & a' * (a * b) = a' * (a * c) \\
 \text{Por asociatividad de } *: & (a' * a) * b = (a' * a) * c \\
 \text{Por definición de inverso} & e * b = e * c \\
 \text{Nuevamente, por definición de neutro:} & b = c
 \end{aligned}$$

Queda demostrado que $a * b = a * c \Rightarrow b = c$.

(la demostración de la segunda línea es análoga)

d) Inverso de la composición

Propiedad

$$(a * b)' = b' * a' (*)$$

Demostración

Trabajaremos la expresión $(a * b) * (b' * a')$:

$$\begin{aligned}
 (a * b) * (b' * a') &= \\
 \text{Por asociatividad:} &= a * [b * (b' * a')] \\
 \text{Por asociatividad:} &= a * [(b * b') * a'] \\
 \text{Por definición de inverso:} &= a * (e * a') \\
 \text{Por definición de neutro:} &= a * a' \\
 \text{Por definición de inverso:} &= e
 \end{aligned}$$

Como $(a * b) * (b' * a') = e$, por definición de inverso, $b' * a'$ debe ser el inverso de $a * b$. Es decir, $b' * a' = (a * b)'$ y la propiedad queda demostrada.

3.3.1. GRUPO ABELIANO

Sea $(G; *)$ es un grupo diremos que $(G; *)$ es un *grupo abeliano* si y solo si $*$ es conmutativa en G .

Ejemplo:

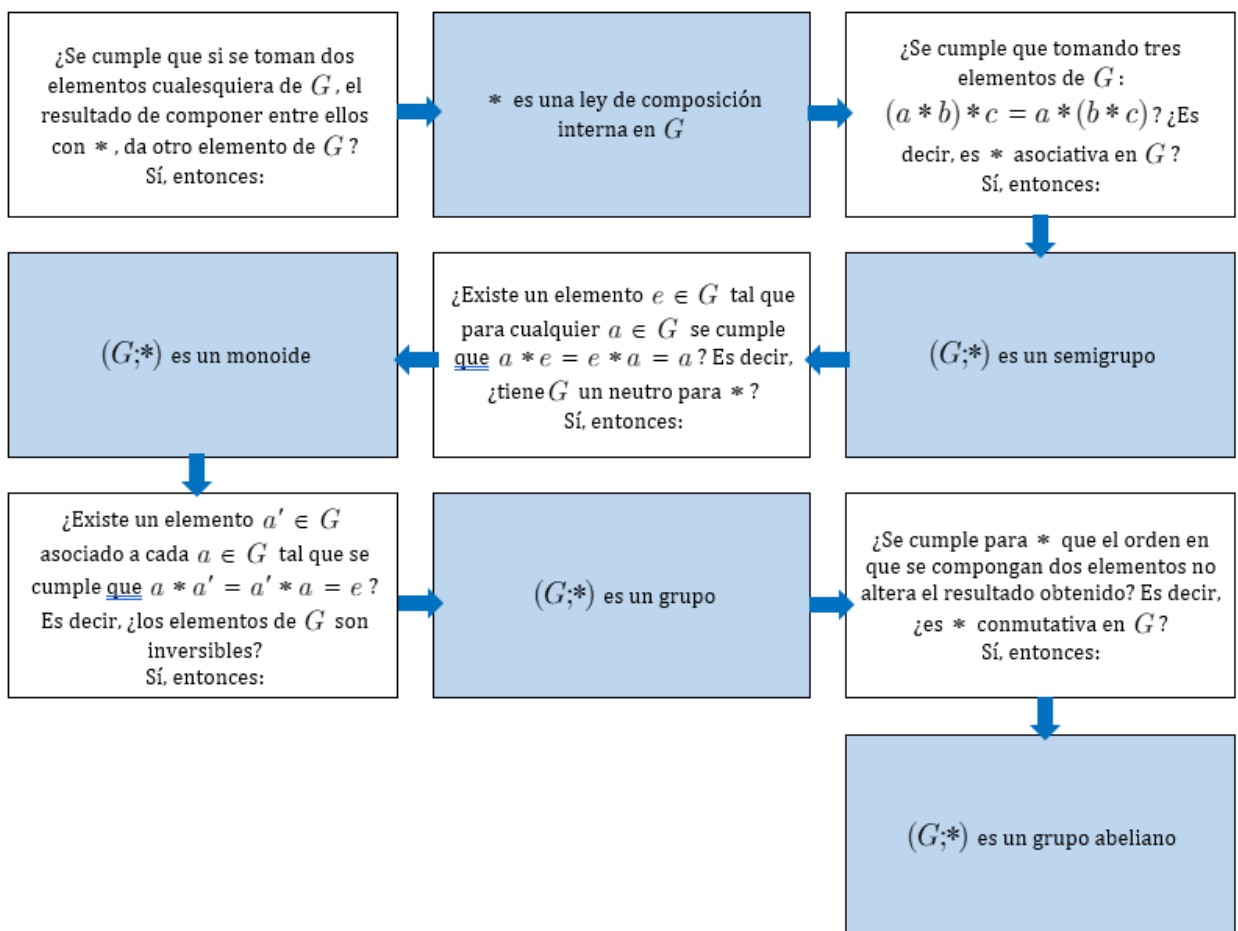
24) $(\mathbb{Z}; +)$ es un grupo abeliano.

Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

Semigrupo, Monoide, Grupo, Grupo abeliano.

CUADRO RESUMEN PARA RECONOCER ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS VISTAS HASTA EL MOMENTO

Partimos de considerar un conjunto no vacío G y una ley $*$ entre elementos de G :



Ejercicio 37. Sea $*$ definida en \mathbb{R} por $a * b = a \cdot b + a + b$ una ley de composición interna, determine si la estructura $(\mathbb{R}; *)$ es:

- | | |
|---------------|--------------------|
| a) semigrupo. | b) monoide. |
| c) grupo. | d) grupo abeliano. |

Ejercicio 38. Sea $*$ definida en $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ por $x * y = x + y + 2xy$:

- a) Pruebe que $(\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}; *)$ es grupo.
 b) Además, teniendo en cuenta las propiedades vistas en la sección 3.1., resuelva la ecuación:

$$(2 * x^{-1})^{-1} = 3$$

Ejercicio 39. Determine, para cada caso qué tipo de estructura tiene el conjunto H con la operación $*$ indicada:

- a) $H = \mathbb{Z}$, definida $*$ como $a * b = a + a \cdot b$.
- b) $H = \mathbb{R}^3$, definida $*$ como $(x_1; y_1; z_1) * (x_2; y_2; z_2) = (x_1 + x_2; 0; 0)$
- c) $H = \mathbb{R}^2$, definida $*$ como $(a; b) * (c; d) = (a + c; b - d)$
- d) $H = \mathbb{R}^2$, definida $*$ como $(a; b) * (c; d) = (a + c; 1)$

Ejercicio 40. Determine si $(\mathbb{C}; \oplus)$, definida $\oplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} / (a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + bi$, tiene estructura de grupo abeliano.

Ejercicio 41. Considere $R_4 = \{x \in \mathbb{C} / x^4 = 1\}$ llamado grupo de las raíces cuartas de la unidad. Pruebe que $(R_4; \cdot)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 42. Sea el conjunto $A = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$, se define en él la operación unión \cup .

- a) ¿Es una ley de composición interna? ¿Por qué?
- b) ¿Cuál es el elemento neutro de la operación \cup ? ¿Por qué?
- c) ¿Todo elemento es inversible? ¿Cuáles? ¿Por qué?
- d) Si además se conoce que \cup es asociativa en A , utilice la información anterior para clasificar a la estructura $(A; \cup)$.

Ejercicio 43. Si en \mathbb{R}^+ se define $*$ como $a * b = 2ab$. Pruebe que $(\mathbb{R}^+; *)$ es grupo abeliano.

Ejercicio 44. Si se conoce que $(A; \oplus)$ es grupo abeliano, y que además siendo $x \in A, y \in A, z \in A$ se cumple que $x \oplus z = y, z \oplus y = x$ y $x \oplus y = z$

¿Cuánto es $(x \oplus z) \oplus (y \oplus z)$?

Ejercicio 45. Considere el conjunto $A = \{1; -1; x; -x; x^2; -x^2\}$, con $x^3 = 1 \wedge x \neq 1$. Sabiendo que $\forall a; b; c \in A \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ estudie si $(A; \cdot)$ es grupo abeliano.

3.3.2. SUBGRUPO

Sea $(G; *)$ un grupo y $\emptyset \neq H \subseteq G$ diremos que $(H; *)$ es un *subgrupo* de $(G; *)$ si y solo si $(H; *)$ es grupo también.

Ejemplos

- 25) $(\mathbb{Z}; +)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}; +)$.
- 26) Las estructuras $(\{e\}; *)$ y $(G; *)$ son subgrupos de $(G; *)$, conocidos como *subgrupos triviales*.

Condición suficiente para la existencia de un subgrupo

Propiedad

Sea $\emptyset \neq H \subseteq G, (G; *)$ un grupo:

$(H; *)$ es subgrupo de $(G; *) \Leftrightarrow (a * b) \in H, \forall a, b \in H$ (*)

Demostración

En primer lugar, demostraremos la implicancia de *izquierda a derecha*, es decir:

$$(H;*) \text{ es subgrupo de } (G;*) \Rightarrow (a * b') \in H, \forall a, b \in H$$

Si $(H;*)$ es subgrupo de $(G;*)$, entonces por definición $(H;*)$ es un grupo y posee todas las características que tiene un grupo.

Consideramos $a, b \in H$. Como $(H;*)$ es grupo, también $b' \in H$. Además, necesariamente $*$ es una ley de composición interna en H . Esto quiere decir que si tomamos dos elementos cualesquiera de H , la composición por $*$ también está en H .

Si tomamos a y b' (que ya sabemos que están en H), la composición entre ellos $(a * b')$ pertenece a H , y esta primera implicancia queda demostrada.

Ahora, demostremos la implicancia de *derecha a izquierda*, es decir:

$$(a * b') \in H, \forall a, b \in H \Rightarrow (H;*) \text{ es subgrupo de } (G;*)$$

Nuestra información ahora, es que cualquier composición entre dos elementos de H de manera que uno sea un elemento ordinario, y el otro un inverso, están en H también.

Si tomamos como elementos de H a los elementos x y x' (al mismo), por hipótesis $(x * x') \in H$. Pero por definición de elemento neutro, $x * x' = e$. Luego, $e \in H$. Es decir, H tiene neutro con $*$.

Ahora consideremos el par de elementos e (demostramos anteriormente que está en H) y x . Nuevamente por hipótesis: $(e * x') \in H$. Como $e * x' = x'$ por definición de elemento neutro, $x' \in H$. Luego, todo elemento $x \in H$ tiene inverso.

Consideremos esta vez el par de elementos x e y' (demostramos en el párrafo anterior que todo elemento es inversible y por lo tanto validamos su uso). Por hipótesis: $(x * (y')) \in H$. Por propiedad del elemento inverso $(y')' = y$. Luego $(x * y) \in H$ y demostramos que $*$ es una operación interna en H .

Finalmente, como $(G;*)$ es grupo entonces $*$ es asociativa en G y como los elementos de H también están en G , $*$ es asociativa en H .

Con lo demostrado en los cuatro párrafos anteriores, entonces $(H;*)$ es subgrupo de $(G;*)$ y la implicancia queda probada.

Ejercicio 46. Demuestre que siendo $(G;*)$ un grupo, entonces son subgrupos de G :

- a) el propio G .
- b) el conjunto $\{e\}$ formado por el neutro de G para $*$.

Los anteriores son denominados *subgrupos triviales*.

Ejercicio 47. El conjunto de los enteros pares, con la operación adición es un grupo. Pruebe que el conjunto de los enteros pares, con la adición es un subgrupo de $(\mathbb{Z}; +)$ y que en cambio no lo es el conjunto formado por los números impares.

Ejercicio 48. Pruebe que la intersección de dos subgrupos de G , también es un subgrupo de G ; y que en cambio no así la unión de dos subgrupos de G .



Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

Subgrupo.



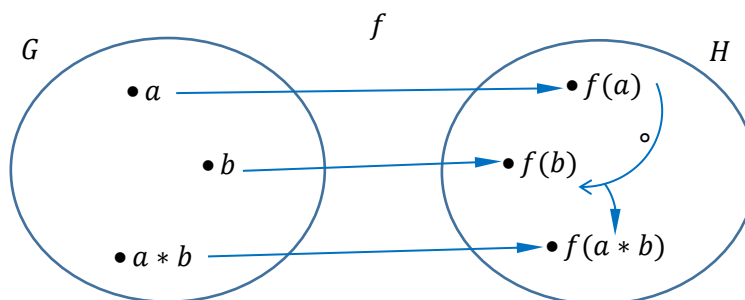
3.3.3. HOMOMORFISMOS DE GRUPOS

Sean los grupos $(G; *)$ y $(H; \circ)$ la función $f: G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos si solo si:

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b), \quad \forall a, b \in G$$

Lo anterior significa que la imagen de la composición de dos elementos a y b de G por la operación $*$ debe ser igual a la composición de las imágenes de a y b por la operación \circ .

El siguiente diagrama evidencia gráficamente este concepto:



La idea es que la imagen de $a * b$ debe ser igual a $f(a) \circ f(b)$.

Ejemplo:

27) Sabemos que la estructura $(\mathbb{R}; +)$ es un grupo donde $+$ es la suma usual entre reales. Consideremos además en el conjunto \mathbb{R}^2 la operación $*$ tal que $(x; y) * (z; t) = (x + z; y + t)$. La estructura $(\mathbb{R}^2; *)$ también es un grupo.

Probaremos que la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(a; b) = -a$ es un homomorfismo de grupos. En efecto:

Tomamos dos elementos de \mathbb{R}^2 : $(x; y)$ y $(z; t)$.

Operamos entre ellos con $*$: $(x; y) * (z; t) = (x + z; y + t)$

Ahora, le calculamos la imagen (por f) a este par que se obtuvo:

$$f(x + z; y + t) = -(x + z) = -x - z$$

Por otro lado, calculamos $f(x; y) = -x$ y $f(z; t) = -z$.

Ahora, operamos entre ellos según +:

$$f(x; y) + f(z; t) = -x + (-z) = -x - z$$

Como las dos expresiones obtenidas son idénticas, entonces f es un homomorfismo de los grupos dados.

También puede probarse en una sola línea de la forma:

$$f[(x; y) * (z; t)] = f(x + z; y + t) = -(x + z) = -x - z = -x + (-z) = f(x; y) + f(z; t)$$

28) Sean $(\mathbb{R}; +)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$ dos grupos, la aplicación dada por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} / f(a) = 3^a$ es un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 49. Probar que la función del ejemplo 28 es un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 50. Si $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ con la operación suma usual de matrices tiene estructura de grupo; y \mathbb{R} con la suma usual de reales también, probar que la aplicación $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = a + d$$

es un homomorfismo de grupos.

Ejercicio 51. Sea $(\mathbb{R}; +)$ un grupo, la aplicación dada por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(a) = a^2$ ¿es un homomorfismo del grupo sobre sí mismo? Justificar.

Ejercicio 52. Sean $(\mathbb{R}^+; \cdot)$ y $(\mathbb{R}; +)$ dos grupos, la aplicación dada por $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \log_2 x$ ¿es un homomorfismo de grupos? Justificar.

Ejercicio 53. Sean los grupos $(\mathbb{R}^3; +)$ y $(\mathbb{R}^2; +)$ y la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x; y; z) = (x - z; y - z)$$

Se pide probar que la misma es un homomorfismo de grupos.

Propiedades de los homomorfismos de grupos

Si $f: G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, entonces:

Propiedad A

$$f(e_G) = e_H \text{ donde } e_G \text{ es el neutro de } G, \text{ y } e_H \text{ es el neutro de } H. (*)$$

Ejemplo

29) En el ejemplo 28, hemos visto que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} / f(a) = 3^a$ resultaba un homomorfismo. Notemos que, para el primer conjunto, el neutro para la operación es 0 y para el segundo conjunto el neutro para la operación es 1. Sucede en efecto que $f(0) = 3^0 = 1$.

Propiedad B

La imagen del inverso de todo elemento de G es igual al inverso de la imagen.
(*)

Ejemplo

30) En el ejemplo 28, hemos visto que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}/f(a) = 3^a$ resultaba un homomorfismo. Tomemos un elemento cualquiera del primer conjunto, por ejemplo 2. Su inverso según la primera operación (suma) es 4. Si le calculamos la imagen por la función f resulta:

$$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Si ahora calculamos $f(2)$ resulta $f(2) = 3^2 = 9$ y le calculamos el inverso a este valor por la segunda operación (producto) queda:

$$[f(2)]' = (9)' = \frac{1}{9}$$

Comprobamos que los resultados son idénticos.

Ejercicio 54. Realice la demostración de la propiedad A procurando utilizar en ella la definición de elemento neutro de un conjunto y el concepto de homomorfismo.

Ejercicio 55. Realice la demostración de la propiedad B procurando utilizar en ella la definición de elemento inverso de un conjunto y el concepto de homomorfismo.

NÚCLEO DE UN HOMOMORFISMO

Si $f: G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, se llama núcleo de f y lo indicaremos $N(f)$ o $ker(f)$ al siguiente conjunto:

$$ker(f) = \{x \in G / f(x) = e_H\}$$

Es decir, el núcleo de un homomorfismo está formado por todos los elementos del primer conjunto cuya imagen por la función f sea el elemento neutro del segundo conjunto.

Ejemplo:

31) En el ejemplo 28, hemos visto que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}/f(a) = 3^a$ resultaba un homomorfismo. Habíamos reparado en que el neutro para el segundo conjunto era 1. El núcleo estará formado por todos los elementos del primer conjunto tales que su imagen sea 1.

Para ello, debemos darle solución a la ecuación $3^a = 1$, ecuación que tiene como único resultado el valor $a = 0$.

Luego, $ker(f) = \{0\}$. Pero esta información ya la teníamos por lo visto en la propiedad 4a. Luego, el núcleo nunca puede ser el conjunto vacío (porque al menos contiene al neutro del primer conjunto).

Ejercicio 55. Halle el núcleo del homomorfismo del ejemplo 27.

Ejercicio 56. Para el homomorfismo visto en el ejercicio 50, la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece al núcleo del homomorfismo. ¿Es el único elemento de este conjunto? Justifique.

Ejercicio 57. Para los ejercicios 51 y 52, encuentre el núcleo para aquellas funciones que hayan resultado ser un homomorfismo.

Ejercicio 58. Sean los grupos $(\mathbb{R}^3; +)$ y $(\mathbb{R}^2; +)$ y el homomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x; y; z) = (x - z; y - z)$$

Halle su núcleo y representarlo gráficamente.

IMAGEN DE UN HOMOMORFISMO

Si $f: G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, se llama imagen de f y lo indicaremos $Im(f)$ al siguiente conjunto:

$$Im(f) = \{y \in H / y = f(x), \text{ con } x \in G\}$$

Es decir, la imagen de un homomorfismo está formado por todos los elementos del segundo que sean imagen de algún elemento del primer conjunto.

32) En el ejemplo 28, hemos visto que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} / f(a) = 3^a$ resultaba un homomorfismo. Como las imágenes de esta función toman la forma 3^a y $3^a > 0$, entonces:

$$Im(f) = \mathbb{R}^+$$

Ejercicio 59. Halle la imagen del homomorfismo $f \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = a + d$

Ejercicio 60. Determine la imagen de las funciones de los ejercicios 51, 52 y 53 que hayan resultado homomorfismos.

4. ANILLO

Sea G un conjunto no vacío, y dos leyes de composición interna en G : $*$ y \circ . La terna $(G; *, \circ)$ es un *anillo*, si y solo sí:

- $(G; *)$ es grupo abeliano.
- $(G; \circ)$ es semigrupo.
- \circ es distributiva respecto de $*$

Observaciones:

- A la ley $*$ se la suele llamar *ley aditiva* y por ello suele expresarse con el símbolo $+$.
- A la ley \circ se la suele llamar *ley multiplicativa* y por ello suele expresarse con el símbolo \cdot .
- La mayoría de los autores conviene en llamar A al conjunto G .

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, reformulamos la definición y diremos que:

La terna $(A; +; \cdot)$ es un anillo si y solo si:

$$A_1: \quad \forall a, b \in A: \quad a \in A \wedge b \in A \Rightarrow (a + b) \in A,$$

$$A_2: \quad \forall a, b, c \in A: \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$A_3: \quad \exists 0 \in A / \forall a \in A: a + 0 = 0 + a = a$$

$$A_4: \quad \forall a \in A: \quad \exists (-a) \in A / \quad a + (-a) = (-a) + a = 0$$

$$A_5: \quad \forall a, b \in A: \quad a + b = b + a$$

$$A_6: \quad \forall a, b \in A: \quad a \in A \wedge b \in A \Rightarrow (a \cdot b) \in A,$$

$$A_7: \quad \forall a, b, c \in A: \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

$$A_8: \quad \forall a, b, c \in A: \quad \begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$$

Ejemplos

33) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$ no es un anillo al no existir neutro para la adición.

34) $(\mathbb{N}_0; +; \cdot)$ no es un anillo porque los elementos no nulos de \mathbb{N}_0 no tienen inverso aditivo en el conjunto.

35) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 61. En \mathbb{Z}^2 se definen la adición y la multiplicación mediante:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) \qquad (a; b) \cdot (c; d) = (0; a \cdot c)$$

Verifique que $(\mathbb{Z}^2; +; \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 62. En \mathbb{Z}^2 se consideran la suma habitual de pares ordenados y el producto definido por:

$$(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c; a \cdot d + b \cdot c)$$

Sabiendo que $(\mathbb{Z}^2; +)$ es un grupo abeliano, compruebe que $(\mathbb{Z}^2; +; \cdot)$ es un anillo.

Ejercicio 63. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x = a + b \cdot \sqrt{2} \wedge a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pruebe que A es un anillo, con la suma y producto usuales de números reales.

4.1. CLASIFICACIÓN DE LOS ANILLOS

Sea $(A; +; \cdot)$ un anillo, diremos que:

- Si \cdot es conmutativa en A , el anillo es *conmutativo*.
- Si \cdot posee elemento neutro (al que simbolizaremos con 1), el anillo es *con identidad*.
- Si un anillo con identidad tiene elementos no nulos inversibles respecto de \cdot , se dice que es un anillo *de división*.

Ejemplo:

36) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ es anillo conmutativo, con unidad pero no de división.

Ejercicio 64. Clasifique los anillos de los ejercicios 61, 62 y 63.

Ejercicio 65. En $A = \{0; 1; 2; 3\}$ se definen la adición y la multiplicación mediante las tablas:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	0	0	0
3	0	1	2	3

Se sabe que $(A; +; \cdot)$ es anillo.

- a) ¿Es conmutativo? b) ¿Con identidad? c) ¿De división?

Ejercicio 66. En \mathbb{R}^2 se definen las operaciones:

$$(x; y) + (z, t) = (x + z; y + t) \qquad (x; y) \cdot (z, t) = (xz; -y \cdot t)$$

- a) ¿Cuánto vale $[(2; 3) + (-1, \sqrt{2})] \cdot (0; \sqrt{2})$?
 b) Sabiendo que $(\mathbb{R}^2; +)$ es un grupo abeliano, pruebe $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$ es un anillo.
 c) Clasifique el anillo anterior.

4.2. PROPIEDADES DE LOS ANILLOS

Sea $(A; +; \cdot)$ un anillo, se verifican las propiedades que se detallan a continuación.

Producto del elemento neutro de la suma por un elemento del conjunto

Propiedad $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \forall a \in A$ (*)

Demostración Trabajaremos la expresión $a \cdot 0$:

$$\begin{aligned}
 a \cdot 0 &= \\
 \text{Por } A_3: &= a \cdot (0 + 0) \\
 \text{Por } A_8: &= a \cdot 0 + a \cdot 0
 \end{aligned}$$

Como $a \cdot 0 = a \cdot 0 + \underbrace{a \cdot 0}_*$, es necesario por A_3 que el elemento señalado con * sea el neutro 0. Luego, $a \cdot 0 = 0$ y la propiedad queda demostrada.

Producto del opuesto de un elemento por otro

Propiedad $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \forall a, b \in A$

Demostración Queda como actividad para el alumno.

Sugerencia: Trabajar la operación $(-a) \cdot b + (a \cdot b)$


Producto de dos opuestos

Propiedad $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \quad \forall a, b \in A$

Demostración


Queda como actividad para el alumno.

Sugerencia: Utilizar la propiedad anterior.



Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Anillos. Propiedades.](#)



4.3. DIVISORES DE CERO

Sea $(A; +; \cdot)$ un anillo, diremos que el mismo no tiene divisores de cero si y solo si:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Lo anterior significa que el producto entre dos elementos solamente puede anularse, si uno de los dos es el elemento nulo. Esto no es de menor importancia ya que es la justificación de la posibilidad de resolución de ecuaciones con incógnitas reales mediante el uso de la factorización, como por ejemplo:

$$x^4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$$

Ejemplo

37) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ es un anillo sin divisores de cero.

Sea $(A; +; \cdot)$ un anillo, diremos que es con divisores de cero si y solo si existen en él elementos no nulos que dan como resultado un producto nulo.

Ejemplo

38) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ es un divisor de cero del conjunto de matrices cuadradas de orden dos, ya que por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$. El conjunto $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tiene divisores de cero.

Ejercicio 64. En \mathbb{Z}^2 se consideran la suma habitual de pares ordenados y el producto definido por:

$$(a; b) \cdot (c; d) = (a \cdot c; b \cdot d)$$

¿Tiene este conjunto divisores de cero? Justifique.

Ejercicio 65. Sea el anillo formado por las funciones continuas en \mathbb{R} , con la suma y producto usuales entre funciones. Éstas están definidas en ley partida con cambio de ley en $x = 0$, de la forma:

$$A(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq 0 \\ g(x) & x > 0 \end{cases}$$

Encuentre algún divisor de cero del conjunto y justifique por qué.

Ejercicio 66. Analice si el anillo del ejercicio 31 tiene o no divisores de cero.

Propiedad

Un anillo es sin divisores de cero si y solo si vale la ley cancelativa para todo elemento no nulo del mismo. (*)

Demostración

Demostraremos primero la implicancia de *izquierda a derecha*:

$$(A; +; \cdot) \text{ no tiene div de cero} \Rightarrow (x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y, z \in A \wedge z \neq 0)$$

Partimos de la expresión $x \cdot z = y \cdot z$.



Sumando miembro a miembro $(-y \cdot z)$ queda: $x \cdot z + (-y \cdot z) = y \cdot z + (-y \cdot z)$
 Por propiedad distributiva y definición de elemento neutro: $(x - y) \cdot z = 0$
 Como $z \neq 0$ y $(A; +; \cdot)$ no tiene divisores de cero, necesariamente debe ocurrir que $x - y = 0$ de donde $x = y$, y la implicancia queda probada.

Ahora, la implicancia de *derecha a izquierda*:

$$(x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y, z \in A \wedge z \neq 0) \Rightarrow (A; +; \cdot) \text{ no tiene divisores de cero}$$

Partiendo de $x \cdot y = 0$, si $y = 0$ la propiedad queda demostrada. Vamos por el otro camino: $y \neq 0$ que nos debe conducir necesariamente a que $x = 0$.

En $z \cdot y$ podemos escribir $z \cdot y = z \cdot y + 0$ por A_3 . Como consideramos $x \cdot y = 0$ podemos escribir $z \cdot y = z \cdot y + x \cdot y$. Ahora, por A_8 : $z \cdot y = (z + x) \cdot y$ y al ser $y \neq 0$ y por hipótesis vale la ley cancelativa. Luego se tiene que $z = z + x$ de donde $x = 0$ y la implicancia queda probada.

	<p>Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:</p>	
<p><i>Divisores de cero.</i></p>		

5. CUERPO

La terna $(K; +; \cdot)$ es un *cuerpo* si y solo si:

- $(K; +)$ es grupo abeliano.
- $(K - \{0\}; \cdot)$ es grupo abeliano.
- \cdot es distributiva respecto de $+$

Ejemplos

39) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ no es un cuerpo.

40) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$, $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ y $(\mathbb{C}; +; \cdot)$ son cuerpos.

Ejercicio 67. Determine si existe algún valor de λ en la operación \circ , de manera que $(\mathbb{R}; *; \circ)$ resulte ser un cuerpo, si se definen:

$$a * b = a + b + 4 \quad a \circ b = ab + \lambda x + \lambda y + 12$$

5.1. PROPIEDADES DE LOS CUERPOS

Sea $(K; +; \cdot)$ un cuerpo, se verifican las propiedades que se detallan a continuación.

Los cuerpos no admiten divisores de cero

Propiedad

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \quad (*)$$

Demostración

Queda como ejercicio para el alumno.

En todo cuerpo, vale la ley cancelativa del producto para todo elemento no nulo del mismo

Propiedad

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$$

Demostración

Consecuencia de la propiedad de anillos y la anterior.

El recíproco del opuesto de todo elemento no nulo es igual al opuesto de su recíproco

Propiedad

$$-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$$

Demostración

Queda como ejercicio para el alumno.



Ingresa al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Cuerpos](#)



SCAN ME



EJERCICIOS INTEGRADORES
UNIDAD 5

NOCIONES DE
ESTRUCTURAS
ALGEBRAICAS

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

Ejercicio 1. En el conjunto $S = \{a; b; c\}$ se define \otimes , ley de composición interna en S , mediante:

\otimes	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

Estudie la asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y elemento inverso.

Ejercicio 2. Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué. Si es verdadera, demuéstrelo.

Siendo las funciones de leyes $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $h(x) = \frac{1}{x}$ e $i(x) = -\frac{1}{x}$, \circ es una ley de composición interna en $A = \{f(x); g(x); h(x); i(x)\}$.

Ejercicio 3. En \mathbb{Z} se define $*$ por: $x * y = xy + 2x + 3y$. ¿Es $*$ una ley asociativa en \mathbb{Z} ? Justifique.

Ejercicio 4. Dados los conjuntos $A = \{3^x, \text{ con } x \in \mathbb{N}_0\}$ y $B = \{x/x \text{ es un impar positivo}\}$, se pide:

- a) Escriba los primeros cuatro elementos de cada conjunto.
- b) Determine si el producto ordinario es una ley de composición interna en A .
- c) Determine si la suma ordinaria es una ley de composición interna en B .

Ejercicio 5. En \mathbb{R} se define la ley de composición interna \otimes dada por $x \otimes y = xy + 4x$. La misma, posee elemento identidad a derecha para cualquier real y es $e = -3$.

- a) Compruebe con algún elemento en particular que $e = -3$ es neutro a la derecha.
- b) Halle los inversos a derecha de los elementos del conjunto, indicando si todos los poseen. Si algún elemento no posee, indique cuál.

Ejercicio 6. Sea define en $A = M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ la operación $*$ de manera que para dos matrices cualesquiera del conjunto, es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & f \\ c & h \end{pmatrix}$$

Muestre que $*$ es una ley de composición interna.

Ejercicio 7. En \mathbb{Z} se definen las operaciones binarias $*$ y \circ por:

$$a * b = a + b + 1 \qquad a \circ b = a + b + ab$$

Estudie el carácter de grupo de \mathbb{Z} con ambas.

Ejercicio 8. Sea el conjunto $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$ y una ley de composición interna \otimes tal que $(x; y) \otimes (a; b) = (x.a; y.a + b)$ analice si $(B; \otimes)$ es monoide.

Ejercicio 9. En \mathbb{R}^2 se definen:

$$(a; b) \otimes (c; d) = (a + c; b + d) \qquad (a; b) * (c; d) = (a \cdot c; b \cdot d)$$

La estructura $(\mathbb{R}^2; \otimes; *)$ es un anillo.

- Estudie el neutro del conjunto por la operación \otimes .
- ¿Es un conjunto con o sin divisores de cero? Justifique.

Ejercicio 10. Un teorema visto en la unidad enuncia que *un anillo no tiene divisores de cero si y sólo si vale la ley cancelativa para todo elemento no nulo del mismo*. A continuación, se demuestra sólo la implicancia de un sentido a otro:

H) $(A; +; \cdot)$ es tal que $a \cdot c = b \cdot c \wedge c \neq 0_A \Rightarrow a = b$

T) Si $x \cdot y = 0_A \Rightarrow x = 0_A \vee y = 0_A$

D) Suponemos que $y \neq 0_A$. Necesariamente debemos concluir que $x \neq 0_A$

$$z \cdot y = z \cdot y + 0_A \xrightarrow{(1)} z \cdot y = z \cdot y + x \cdot y \xrightarrow{(2)} z \cdot y = (z + x) \cdot y \xrightarrow{(3)} z = z + x \xrightarrow{(4)} x = 0_A$$

- Determine si se demuestra la implicancia de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda.
- Justifique cada paso de la prueba indicado.

Aclaración: la justificación debe ser completa. Por ejemplo: no “Por propiedad conmutativa” sino “por propiedad conmutativa ya que $(A; +)$ es grupo abeliano por ser $(A; +; \cdot)$ un anillo”

Ejercicio 11. Si en \mathbb{R}^+ se define $*$ como $a * b = 2ab$. Pruebe que $(\mathbb{R}^+; *)$ es grupo abeliano.

Ejercicio 12. En el conjunto $H = \{a; b; c\}$ se define \bullet , y se conoce que $(H; \bullet)$ es grupo abeliano.

Además, se sabe que:

$$a \bullet b = c \qquad a \bullet c = a \qquad b \bullet c = b$$

Determine el resultado de la operación $(b \bullet a) \bullet (c \bullet b)$, justificando cada paso.

Ejercicio 12. Siendo $(\mathbb{R} - \{0\}; \cdot)$ un grupo. Determine si:

- $A = \{1; -1\}$ es subgrupo de $\mathbb{R} - \{0\}$.
- \mathbb{R}^- es subgrupo de $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ejercicio 13. Sabiendo que \mathbb{R}^2 con la suma usual de pares ordenados es un grupo; que posee elemento identidad (o neutro) y que todo par ordenado de reales tiene elemento inverso (podría llamarse opuesto en este caso en particular, se pide utilice la condición suficiente para probar que el conjunto $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ es un subgrupo del grupo dado.

Ejercicio 12. La terna $(M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}); +; \cdot)$ es un anillo.

Verifique si es un anillo conmutativo y con identidad.

Ejercicio 13. Dado el conjunto $A = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & x \end{pmatrix} \right\}$ con $x \in \mathbb{Z}$, se pide:

- Escriba tres elementos cualesquiera del conjunto y determinar si la matriz identidad pertenece al mismo.
- Pruebe que la suma es interna en A .
- Pruebe que la operación suma es asociativa en A .
- El conjunto tiene neutro para la suma y es la matriz nula. A partir de esto, halle los inversos de los elementos de A .
- Con la información anterior, clasifique a la estructura $(A; +)$
- Se conoce que $(M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}); +)$ es grupo. ¿Qué relación conceptual hay entre A y $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$?

Ejercicio 14. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas:

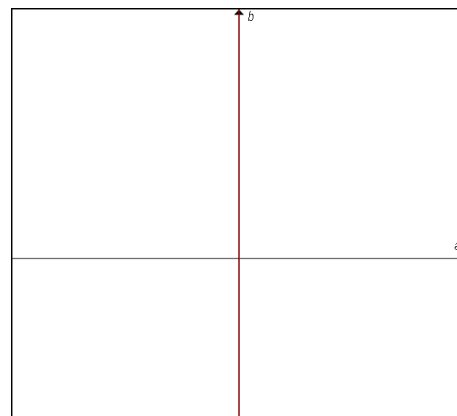
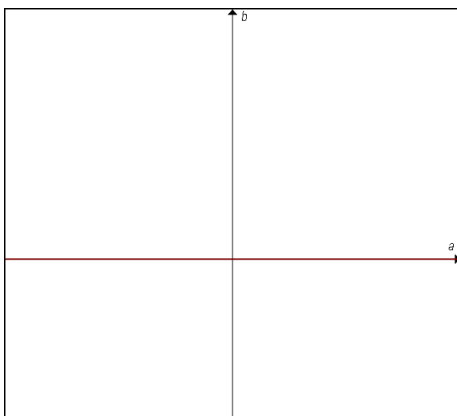
- La terna $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ es un cuerpo.
- Dado el grupo $(\mathbb{R}; +)$ la función de ley $f(x) = 2x$ es un homomorfismo de $(\mathbb{R}; +)$ sobre sí mismo.
- La siguiente operación definida en el conjunto de matrices de dos por dos, es asociativa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & f \\ g & d \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15. Sean los grupos $(\mathbb{R}^3; +)$ y $(\mathbb{R}^2; +)$ y la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x; y; z) = (0; x - z)$$

- Pruebe que f es un homomorfismo de grupos.
- Halle el núcleo de f .
- Determine cuáles de las siguientes es la imagen de f . Justifique:



Ejercicio 16. En el conjunto $A = \{-1; 0; 1\}$ se define $*$ según $x * y = |x| - |y|$

- Realice una tabla de composición y justificar por qué $*$ es una LCI en A .
- Justifique si $*$ es conmutativa en A .
- Justifique por qué la operación no tiene elemento neutro en A .

Ejercicio 17. Sean los grupos $(\mathbb{R}^2; +)$ y $(\mathbb{R}_{2 \times 2}; +)$, entre ellos se define $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{2 \times 2}$ según:

$$f(a; b) = \begin{pmatrix} 2a - b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pruebe que f es un homomorfismo de grupos.
- Halle su núcleo, explicando cómo se halla, y grafíquelo en el espacio correspondiente.

Ejercicio 18. Resuelva las siguientes cuestiones, justificando todas las respuestas.

- ¿Podría ser $(\mathbb{R}_{2 \times 2}; \cdot)$ un grupo abeliano?
- $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ es anillo. ¿Por qué decimos que es *sin divisores de cero*?
- Explicar qué procedimiento (no desarrollarlo) se utiliza para probar que el elemento neutro e según la operación $*$ en A es único.
- La terna $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ es un anillo. ¿Es conmutativo? ¿Es con identidad? ¿Es de división?
- La estructura $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ ¿es un cuerpo?
- Si $(A; *)$ y $(B; \circ)$ son grupos con neutros e_A y e_B , respectivamente; y $f: A \rightarrow B$ es un homomorfismo de grupos. ¿Cuánto vale $f(a * a')$?

Nota: a' es el inverso de a según $*$ en A .

Ejercicio 19. Sea $R = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ el conjunto de las horas *en punto* en un reloj circular de pared (sin distinguir entre AM y PM). Se define en R la operación $+$ (suma de horas).

Entonces puede probarse que para todo $x, y \in R$ se verifica que $(x + y) \in R$. Así, por ejemplo, si hacemos $8 + 7 = 3$. Luego, $+$ es una ley de composición interna en R .

- Dé el valor de i) $6 + 8$ ii) $3 + 12$
- Explique cuál es el elemento neutro de la operación en el conjunto.
- Analice si los elementos del conjunto tienen inversos.
- Si se conoce que $(R; +)$ es semigrupo, ¿es $(R; +)$ monoide? ¿grupo?

Ejercicio 20. Las estructuras $(\mathbb{R}^2; +)$ y $(\mathbb{R}; +)$ son grupos.

Dada la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de ley $f(x; y) = x + y$, se pide:

- Pruebe que f es un homomorfismo.
- Halle el núcleo de f y representarlo gráficamente. Explicar cómo se obtuvo.
- Con base en la información que da el enunciado, determine qué faltaría saber para afirmar que $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ es un anillo.
- Explique si el anillo anterior es con o sin divisores de cero.



UNIDAD 5 PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

UNIDAD 4. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

1. INTRODUCCIÓN

Una demostración matemática es un razonamiento realizado con una lógica que tiene validez, y que progresa a partir de ideas que se dan por ciertas (llamadas *hipótesis*) hasta la afirmación que se esté planteando, o sea, hasta obtener la veracidad de la *tesis* formulada, mediante lo que se denomina *demostración propiamente dicha*.

Todos los pasos que incluye el proceso de demostración deben estar fundamentados en la aplicación de reglas de deducción: fundadas ya sea en axiomas o en teoremas anteriormente demostrados o en reglas básicas de deducción del sistema en cuestión.

El hecho de no conocer ninguna demostración de un teorema no implica su no veracidad; sólo la demostración de la negación de este resultado implica que es falso.

2. ESTRUCTURA DE UNA DEMOSTRACIÓN

En general, podemos decir que una demostración consta de tres partes:

- a) Tesis: El conocimiento que se trata de demostrar, es decir la proposición (teorema) cuya validez se trata de probar.
- b) Hipótesis: Los fundamentos empleados como base de la demostración.
- c) Demostración propiamente dicha: El procedimiento usado para lograr que el conocimiento quede demostrado.

Los procedimientos de demostración permiten establecer la conexión lógica entre los fundamentos y sus consecuencias sucesivas, hasta llegar como conclusión a la tesis que así se demuestra. Una tesis puede ser demostrada mediante distintos procedimientos.

3. ALGUNAS DEFINICIONES

Teorema: Consiste en una o más proposiciones p_i , llamada hipótesis y otra proposición T que será conclusión.

Corolario: Es un teorema que se deduce inmediatamente de otro teorema.

Lema: Es un teorema que no tiene especial interés en sí mismo pero que es útil para demostrar otro.

Demostración: Es un razonamiento que prueba la veracidad de un teorema.

4. TIPOS DE DEMOSTRACIONES

Se pueden distinguir a grandes rasgos, tres tipos de demostraciones:

- Demostración directa
- Demostración indirecta (por contradicción, por el absurdo)
- Demostración recursiva (por inducción completa)

Demostración directa

Siendo p_1, p_2, \dots, p_n un conjunto de proposiciones (axiomas, reglas o teoremas) ya demostrados (es decir, conocidos como verdaderos), a partir de estos se quiere demostrar otra proposición T . Es decir, una demostración directa tiene la forma:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow T$$

Ejercicio 1. Utilice una forma directa para probar todas las siguientes reglas o propiedades:

- La suma de dos enteros impares, es otro entero par.
- $a \in \mathbb{Z}$ es par $\Rightarrow a^2 \in \mathbb{Z}$ también es par
- Si un entero positivo A es múltiplo de 6, también es múltiplo de 2 y de 3.
- Si $a > 0, b > 0$ y $a > b$ ambos reales, entonces $a^2 > b^2$
- $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$
- $x = a$ es raíz de $y = f(x) \Rightarrow x = a$ es raíz de $g(x) = |f(x)|$
- $i^n = i^R$ con $n, R \in \mathbb{N}_0$ siendo R el resto de dividir n por 4
- $\log_x(a \cdot b) = \log_x(a) + \log_x(b)$

Demostración indirecta

Esta demostración se basa en considerar que p_i son verdaderas y contradecir la tesis, es decir: que sea cierto $\neg T$. Con esto, se llegará a una contradicción, y por lo tanto T será verdadera. A este tipo de demostración se la conoce como demostración por el absurdo o por contradicción.

Ejercicio 2. Utilice el método del absurdo para probar que:

- La inversa del inciso 1) b).
- $\sqrt{2}$ es un número irracional.
- Si m y n son enteros tales que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$ entonces n es par.
- Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$.

Principio de inducción completa

El principio de inducción completa es un método de demostración que se utiliza para validar propiedades cuando éstas son relativas al conjunto de los números naturales.

Podemos pensar en la siguiente situación para comprender cómo funciona este método de demostración. Supongamos una fila infinita de los alumnos de una escuela. Se conoce que, si uno

habla, el que se encuentra inmediatamente detrás también hablará. Entonces nos preguntaremos: ¿qué condición deberá suceder para poder afirmar que todos hablarán?

Parece razonable pensar que, si el primer alumno de la fila habla, entonces (como si uno habla, el que está detrás también) todo el conjunto de alumnos lo hará.

El principio de inducción completa supone que si se verifica una propiedad para $n = 1$ y el hecho de que ocurra para $n = k$ implica inmediatamente que también se cumplirá para el siguiente, es decir para $n = k + 1$, entonces se cumplirá para cualquier n (es decir, para la totalidad del conjunto).

Teorema.

Sean $\{P_n\}$ un conjunto de propiedades tales que:

- $P(1)$ es cierta, y
- El hecho de que $P(k)$ sea cierta implica que $P(k + 1)$ también lo sea,

Entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Demuestre todas las siguientes propiedades, utilizando el principio de inducción.

- a) La suma de los primeros n número naturales es $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
- b) La suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3.
- c) $n^2 \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- d) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) \cdot 3^k = (n - 1) \cdot 3^{n+1} + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- e) $7^n - 1$ es múltiplo de 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- f) $\sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3}{2} \cdot (3^n - 1)$
- g) $\sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$
- h) $3^n > 2^n + 20, \forall n \geq 4$
- i) Para cualquier natural se cumple que la suma de los cubos de tres consecutivos es divisible por 9.
- j) $n^3 - n = 3 \cdot \dots \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- k) $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$
- l) La suma de los primeros n números naturales impares, es n^2 .
- m) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) = 2n^2$
- n) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- o) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

Ejercicio 4. Sea la propiedad $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n > 2^n$, se pide:

- Determine el valor mínimo para el que se verifica.
- Compruebe utilizando principio de inducción si verifica para todo natural mayor a él.

Ejercicio 5. Pruebe por inducción que $7^n + 1$ es divisible por 8 para cualquier natural.

Ejercicio 6. Pruebe que $4n < 2^n$ para todo natural $n \geq 5$.

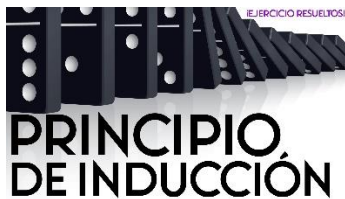
Ejercicio 7. ¿Para qué valores de n se verifica que $2^n > n^2$?

Ejercicio 8. Pruebe que $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ para todo $x \neq 1$ y n natural.

Ejercicio 9. Pruebe que n rectas dividen al plano en a lo sumo 2^n regiones.

Ejercicio 10. Pruebe que un polígono de $n \geq 3$ lados tiene $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonales.

Ejercicio 11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, intuya qué matriz se obtiene al hacer A^n y pruébelo por inducción.



Ingresá al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Ejercicios resueltos principio de inducción.](#)





UNIDAD 6 CONTEO

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

UNIDAD 6. CONTEO

1. INTRODUCCIÓN

Cuando nos preguntamos, por ejemplo, ¿de cuántas formas se pueden elegir entre siete personas, tres de ellas para formar una comisión?, estamos tratando de resolver un problema de conteo. En diversos temas de la matemática interviene el conteo, como lo es por ejemplo en el cálculo de probabilidades. En esta unidad, estudiaremos principalmente técnicas para el cálculo de respuestas a problemas en los que nos interesa conocer una cantidad de grupos o subgrupos de una colección de objetos dada.

2. REGLAS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

2.1. Regla de la suma

Supongamos que, en una asignatura de oralidad, hay que elegir una unidad completa de una de las asignaturas Cálculo o Álgebra II y realizar un breve resumen sobre qué trata la unidad y luego explicarlo al resto de los compañeros. ¿Cuántas posibilidades hay si en Cálculo tiene siete unidades y Álgebra II analítica tiene seis?

Supongamos que un evento C , puede realizarse por dos vías A y B .

de m formas distintas si usamos la vía A ,
de n formas distintas si usamos la vía B ,

entonces el evento C puede realizarse de $(m + n)$ formas distintas. A esto se lo conoce como *regla de la suma*.

Volviendo al ejemplo, notemos que las unidades de Cálculo (A) son siete ($m = 7$):

1: Límite y Continuidad, 2: Derivadas, 3: Teoremas sobre funciones derivables, 4: Aplicaciones de la derivada, 5: Integrales indefinidas, 6: Integrales definidas, 7: Teoremas sobre funciones intregrables.

Mientras que las unidades de Álgebra II (B) son seis ($n = 6$):

1: Matrices, 2: Determinantes, 3: Sistemas de ecuaciones lineales, 4: Nociones de estructuras algebraicas, 5: Principio de inducción completa y 6: Conteo.

Entonces hay $m + n = 7 + 6 = 13$ posibilidades de elección.

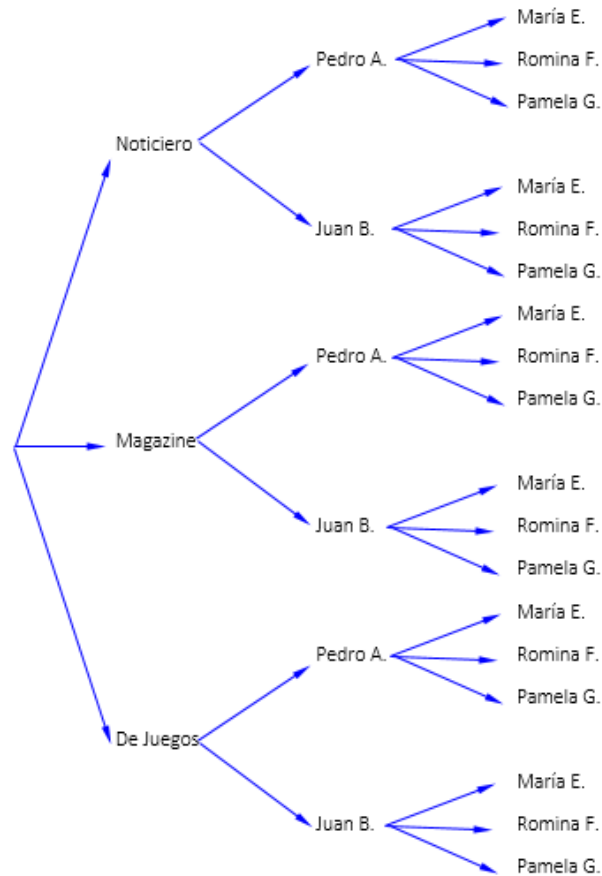
2.2. Regla del producto

Un productor de un canal de stream, decide ampliar su programación matutina, colocando un programa de 7 a 9 hs de la mañana. Luego de analizar varios proyectos junto a diversos productores, decide que el formato del programa será uno de los tres siguientes: Noticiero, Magazine o de Juegos.

Cualquiera de los tres que se decida producir, será conducido por una pareja mixta de conductores. Entre los posibles conductores varones del programa se encuentran: Pedro A. o Juan B. Finalmente,

la pareja de conductores se formará con alguna de las siguientes conductoras: María E., Romina F. o Pamela G.

Vemos que puede suceder que el programa tenga alguno de los tres formatos, algunos de los dos conductores y alguna de las tres conductoras. La gama de posibilidades se puede describir en el siguiente diagrama:



Así, por ejemplo, que el programa sea de juegos, y la dupla conductora sea Pedro A. y Pamela G. es *una opción* que el programador puede elegir.

También podemos notar que son en total 18 las posibilidades existentes.

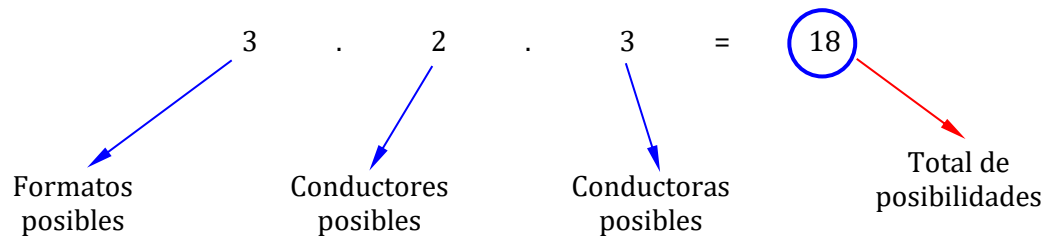
El diagrama dibujado anteriormente, que sirve para representar mediante una disposición ramificada (de allí su nombre) la totalidad de posibilidades existentes para determinada situación, recibe el nombre de *Diagrama de árbol*.

En el ejemplo anterior, notamos que no resulta tan complicado realizar un diagrama que nos indique el total de posibilidades de la situación. Sin embargo, supongamos que se tenga el siguiente ejemplo:

Una persona posee cuatro tarjetas de crédito que ofrecen en cierta semana del año, todas ellas una promoción en cuotas sin interés: 3, 6, 9, 12 o 18. Una casa de perfumes ofrece durante esa semana un catálogo de 39 fragancias. ¿Cuántas posibilidades para comprar un único perfume tiene? El alumno estará de acuerdo con que, si usáramos el diagrama de árbol para contar todas las posibilidades, el trabajo se haría algo agotador.

Sin embargo, nuestro interés se centra no, en cada una de las posibilidades, sino en cuántas formas de ordenamiento existen.

Si volvemos al primer ejemplo del programador, en el cual, eran 18 las posibilidades en total que tenía para la elección del programa con sus conductores, notaremos que 18 pudo obtenerse de la siguiente manera:



El total de posibilidades es, en definitiva, el producto entre cada una de las posibilidades que se tienen en cuenta.

Supongamos que un evento C , puede realizarse en dos etapas A y B , de quienes sabemos:

A y B son independientes entre sí,

la etapa A puede realizarse de m formas diferentes,

la etapa B puede realizarse de n formas diferentes, siendo éstas independientes del resultado de A ,

entonces el evento C puede realizarse de $(m \cdot n)$ formas distintas. A esto se lo conoce como regla del producto.

Es importante que se entienda por qué se aplica esta regla, es decir por qué es un producto: En el ejemplo analizado (el del programador) el producto es $3 \cdot 2 \cdot 3$ porque *por cada uno* de los 3 formatos, se pueden elegir cualquiera de los 2 conductores, y a la vez, *por cada uno de ellos*, se elige su pareja de conducción entre 3 posibilidades (3 conductoras).

Ejercicio 1. Una cafetería ofrece 8 ensaladas, 6 entradas, 4 verduras y 3 postres. ¿Cuántas comidas diferentes son posibles si se selecciona una muestra de cada categoría?

Ejercicio 2. Realice un diagrama de árbol para enumerar todas los ordenamientos posibles de los elementos del conjunto $H = \{a; b; c\}$.

Ejercicio 3. Si una patente argentina tiene dos letras seguidas de tres dígitos numéricos, seguidas de dos letras.

- a) ¿Cuántas patentes son posibles si el primer número no puede ser 0 ni 1?
- b) Si al día de la fecha ya fueron utilizadas todas las patentes que comienzan hasta la letra H inclusive, ¿cuántas patentes quedan aún por utilizar?
- c) ¿Cuántas patentes tienen las tres letras del medio iguales?
- d) ¿Cuántas patentes tienen los cuatro dígitos iguales?

Ejercicio 4. Se lanza una moneda cuatro veces. ¿Cuántas posibles sucesiones de caras (C) o cruz (X) existen?

Ejercicio 5. ¿De cuántas maneras pueden elegirse en un mazo de 52 cartas, 5 de ellas teniendo en cuenta que:

- a) cada carta que se extrae no se repone en el mazo?
- b) cada carta que se extrae se repone en el mazo?

3. FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se denomina factorial de un número n (siendo $n \geq 0$ y entero) y se denota por $n!$, al producto de los enteros desde 1 hasta n .

Entonces, $n! = 1.2.3. \dots .(n - 1).n$ o también de la forma $n! = n.(n - 1). \dots 3.2.1$

Ejemplos

1) $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

2) $2! = 2.1 = 2$

3) $7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$

Por convenio se define $0! = 1$

3.1. Propiedad

En alguna ocasión, se nos puede presentar un problema como el siguiente: Calcular $\frac{1032!}{1029!}$

El número $1032!$ es muy grande (también lo es $1029!$) y la calculadora no trabaja con demasiada cantidad de cifras (más que con diez en la mayoría de ellas). Es posible imaginar el trabajo que tomaría calcularlo nosotros mismos aplicando la definición de factorial (la multiplicación de los números enteros $1.2.3. \dots .1030.1031.1032$). Sin embargo, podemos notar que:

$1032! = 1032.1031.1030.1029.1028. \dots .3.2.1$ y $1029.1028. \dots .3.2.1$ es igual al factorial de 1029, o sea igual a $1029!$.

Por lo que $1032! = 1032.1031.1030.1029!$

En la operación que se nos pedía resolver: $\frac{1032!}{1029!}$, reemplazamos $1032!$ por $1032.1031.1030.1029!$ y entonces se tiene:

$$\frac{1032!}{1029!} = \frac{1032.1031.1030.1029!}{1029!} = 1032.1031.1030,$$

que evidentemente es un cálculo mucho más sencillo que su resolución por definición.

Así, $\frac{1032!}{1029!} = 1095911760$.

En conclusión: $n! = n \cdot (n - 1)!$

Ejercicio 6. Determine el valor de las siguientes expresiones que involucran factoriales:

a) $6!$

b) $\frac{8!}{6!}$

c) $\frac{5! \cdot 3!}{4!}$

Ejercicio 7. Resuelva las siguientes operaciones con factoriales:

a) $\frac{2027! \cdot 2!}{2026!}$

b) $\frac{15! \cdot 3!}{13!} + \frac{12!}{10!}$

c) $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$

Ejercicio 8. Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $n + 1 = \frac{21!}{20!}$

b) $\frac{n!}{(n-1)!} + 12 = 2n$

c) $\frac{(n+1)!}{n!} = a$

d) $\frac{(n+2)!}{n!} = 20$

Ejercicio 9. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a) $5 \cdot (4!) = 5!$

b) $3 \cdot (n!) = (3n)!$

c) $6! - 4! = 2!$

d) $\frac{124!}{123!} = 124$

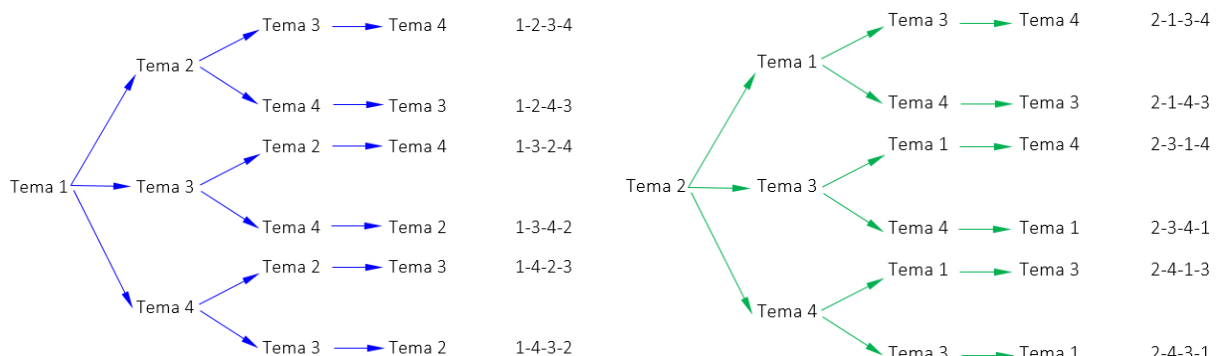
e) La ecuación $\frac{n!}{(n-1)!} \cdot 5 = 1$ tiene solución.

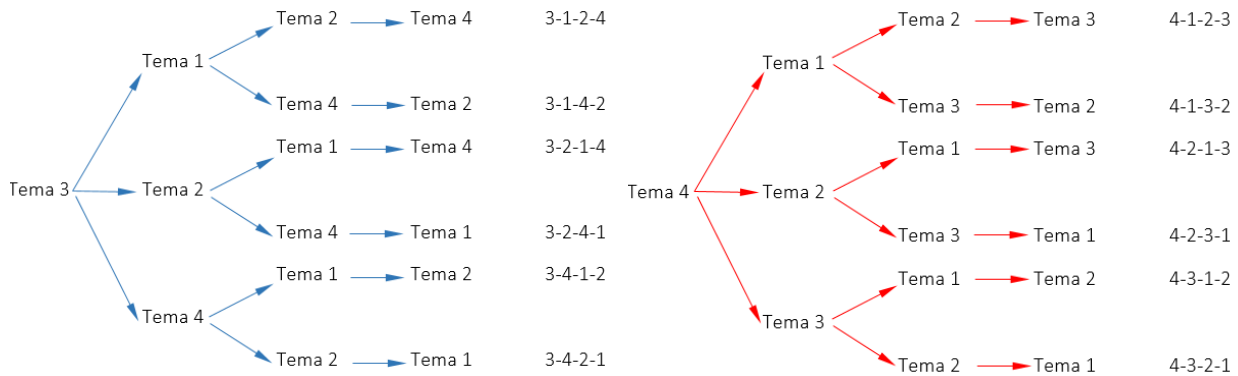
4. PERMUTACIONES SIMPLES

En las aplicaciones que se utilizan para reproducir audios (como Spotify), existe una función llamada MODO ALEATORIO, cuya función es reproducir los temas, en un orden diferente al orden original de la lista. Por ejemplo, si se escucha un álbum determinado, se podría empezar la reproducción con el cuarto, continuar con el segundo, y así aleatoriamente.

Juan, escuchará un single de su banda favorita que contiene 4 temas. ¿De cuántas maneras se pueden reproducir esos 4 temas, usando el modo aleatorio de reproducción? (contar además la reproducción en el orden original y tener en cuenta que la función no repite los temas en la reproducción)

Podemos armar un diagrama de árbol, para contar las posibilidades en total existentes de ordenar los 4 temas:





De acuerdo con la regla de la multiplicación, podríamos obtener directamente la cantidad de posibilidades pensando que:

Para el primer tema, el reproductor tiene 4 posibilidades de elección. Ya para el segundo, tiene un tema menos para elegir, ya que este ha sido elegido anteriormente, es decir, tiene 3 posibilidades de elección. Para elegir el tercero, quedan 2 posibilidades ya que han sido elegidos 2, anteriormente. Evidentemente, para el cuarto tema, sólo existirá 1 posibilidad.

Es decir, las posibilidades serán: 4.3.2.1 ¿A qué es igual esta cantidad? La respuesta es: a 4!

Entonces, la cantidad de formas de ordenar los 4 temas será: 4!

Dados m elementos distintos se denominan *permutaciones simples de los m elementos*, a la cantidad total de grupos que se pueden formar con esos m elementos, cambiando el orden de los mismos y usándolos a todos.

Esta cantidad posible de ordenamientos está dada por: $P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ o, lo que es lo mismo: $P_m = m!$

Ejercicio 10. ¿De cuántas formas puede colocarse en fila una familia de cinco personas para tomarse una foto?

Ejercicio 11. Escriba todas las permutaciones que se pueden formar con los elementos del conjunto $A = \{x; y; z\}$.

Ejercicio 12. Considere el conjunto $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 7\}$

- ¿Cuántos números de seis cifras se pueden formar con los elementos del conjunto A sin repetir ninguno?
- ¿Cuántos de esos números terminan en 1?
- ¿Cuántos de esos números son pares?
- ¿Cuántos de esos números son mayores que 500.000?

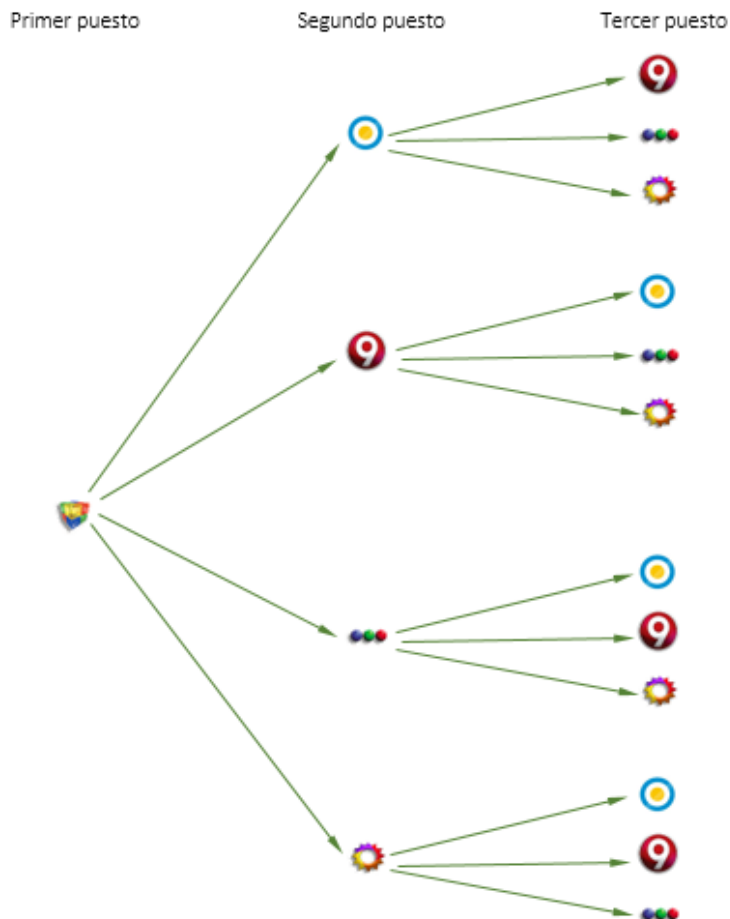
Ejercicio 13. ¿De cuántas maneras se puede formar una fila con siete personas?

Ejercicio 14. ¿De cuántas formas se puede formar una fila con siete personas, pero sabiendo que la primera posición debe ser ocupada por una determinada persona?

5. VARIACIONES O ARREGLOS SIMPLES

El rating es una medida que indica la cantidad de audiencia que tiene un programa o un canal determinado. Los llamados canales de aire son aquellos que no necesitan de una conexión por cable para ser vistos. En CABA, cinco son los canales de aire: América, Televisión Pública, Canal 9, Telefé y Canal 13. ¿De cuántas maneras posibles puede quedar conformado el podio de primer, segundo y tercer puesto del año, respecto al promedio de rating anual?

Veamos los datos que tenemos. Tenemos 5 canales, y 3 puestos que se disputarán:



Podríamos continuar la construcción del diagrama de árbol, variando quién ocupa el primer puesto, y las posibilidades serían muchas más.

En definitiva, tendremos 5 posibilidades para elegir el primer puesto. Para el segundo puesto, hay cuatro posibilidades, ya que uno de los canales ha sido elegido para el primer puesto. Finalmente, para el tercer puesto, habrá tres posibilidades, y la cantidad total de posibilidades de armar los tres puestos será de:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Observemos que:

En el ejemplo que vimos calculamos un total de posibilidades trabajando con un número (que llamaremos n) menor que el total (que llamaremos m): 3 de los 5 canales.

Además, podemos observar que interesa el orden en el que se acomodan los canales. Podemos obtener uno de los grupos formado por Canal 9, Canal 13 y Telefé, pero no es lo mismo que Canal 9 esté segundo, que esté tercero, por ejemplo. Por eso mismo es que importa el orden en el que se seleccionan los canales para formar los grupos.

Dados m elementos distintos entre sí, se denominan *variaciones simples de los m elementos tomados de a n* , a la cantidad de todos los grupos de n elementos (con $n < m$) que se pueden formar, siempre que:

- ninguno de los elementos se repita.
- si se altera el orden de los elementos, entonces el grupo resultante es distinto al original. Es decir, importa el orden en el que se acomodan los elementos.

Su notación es $V_{m,n}$, y se lee: variaciones simples de m elementos, tomados de a n .

Se calculan: $V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}_{n \text{ factores}}$

5.1. Propiedad

Otra forma de cálculo de las Variaciones es: $V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

Demostración:

Sabemos que: $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$

Si multiplicamos y dividimos la expresión por $(m-n)!$ (¿por qué podemos hacer eso?), resulta:

$$V_{m,n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) \cdot (m-n)!}{(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

y se demuestra lo expuesto.

Ejercicio 15. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden escribir sólo utilizando cifras impares?

Ejercicio 16. En una pista se encuentran seis atletas y entran en el carril de los 100 metros. ¿De cuántas maneras puede conformarse el podio (oro, plata, bronce)?

Ejercicio 17. En una clase de 24 alumnos, se hacen elecciones para presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras diferentes puede resultar la elección?

Ejercicio 18. Halle el valor de n que verifique la ecuación $V_{n,2} = 132$.

Ejercicio 19. Tres personas suben en la planta baja al ascensor de un edificio que tiene cinco pisos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ir saliendo del ascensor si en ningún piso baja más de una persona?

Ejercicio 20. ¿De cuántas formas se pueden sentar 3 niñas en un banco de 2 asientos?

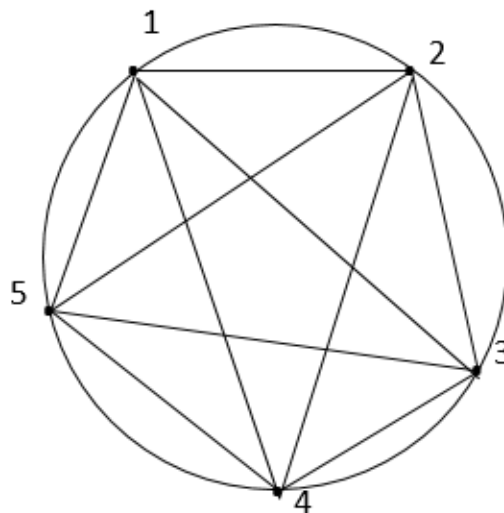
Ejercicio 21. ¿De cuántas maneras pueden sentarse diez personas en un banco si hay cuatro sitios disponibles?

Ejercicio 22. ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los dígitos del 1 al 9 si deben terminar en 1 y no pueden repetirse?

6. COMBINACIONES SIMPLES

Señalemos cinco puntos en una circunferencia. ¿Cuántos triángulos diferentes cuyos vértices sean tres de esos cinco puntos, pueden obtenerse?

Veamos:



Anotaremos a cada triángulo por sus tres vértices.

Para escribir todos los triángulos, sin repetir ni olvidar ninguno, anotemos sólo los grupos de tres vértices en los que los números aparezcan en su orden natural:

123 ; 124 ; 125 ; 134 ; 135 ; 145

234 ; 235 ; 245

345

Podemos observar que en total hay diez triángulos distintos.

En el ejemplo analizado, podemos notar que el orden en que se seleccionan los vértices no importa ya que por ejemplo, los vértices 1, 2 y 3 forman el mismo triángulo que los vértices 2, 1 y 3 elegidos de esa forma. Por lo tanto, de todas las permutaciones entre los tres elementos:

123 132 213 231 312 321

sólo consideramos una de las seis posibilidades, ya que de trata del mismo triángulo.

Dados m elementos distintos entre sí se denominan *combinaciones simples de los m elementos tomados de n* , a la cantidad de todos los grupos de n elementos (con $n < m$) que se pueden formar, siempre que:

- ninguno de los elementos se repita.
- si se altera el orden de los elementos, entonces el grupo resultante es igual al original. Es decir, no importa el orden en el que se acomodan los elementos.

Su notación es $C_{m,n}$, y se lee: combinaciones de m elementos, tomados de n .

Volvamos al ejemplo anterior. Notemos, que si consideramos todas las permutaciones de los tres elementos (que son 6 en total: 123, 132, 213, 231, 312, 321) obtendríamos, no diez triángulos, sino $10 \cdot 6 = 60$ (que es un resultado erróneo, ya que se estaría considerando seis veces a un mismo triángulo).

Entonces,

$$C_{m,n} \cdot P_n = V_{m,n}$$

Es decir, que: $C_{m,n} \cdot P_n = V_{m,n}$

De donde:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Atención: es importante comprender la diferencia que existe entre variaciones y combinaciones. En las variaciones importa el orden de selección de los elementos: si formamos dos conjuntos con los mismos elementos, elegidos en distinto orden, los conjuntos serán distintos; por ejemplo los números 123 y 312 tienen los mismos dígitos, pero obviamente, son diferentes. En cambio, en las combinaciones, no importa el orden de selección de los elementos: si formamos dos conjuntos con los mismos elementos, los conjuntos serán iguales; por ejemplo, si queremos formar grupos de trabajo de cuatro personas, el grupo formado por Juan, María, Pedro, José es el mismo, evidentemente, que si para formarlo se llamara en el orden: Pedro, María, José, Juan.

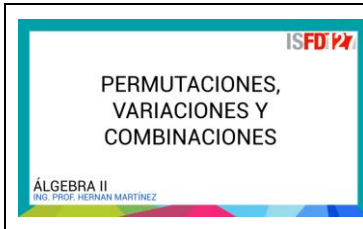
Ejercicio 23. Un club tiene ocho miembros. ¿De cuántas maneras se puede escoger un comité de tres miembros?

Ejercicio 24. Con una moneda de 1 peso, una de 50 centavos, una de 25 centavos y una de 10 centavos. ¿Cuántas cantidades distintas podemos conseguir con dos monedas?

Ejercicio 25. Un estudiante debe contestar siete preguntas en un examen de doce. ¿De cuántas formas diferentes puede seleccionarlas?

Ejercicio 26. ¿De cuántas maneras posibles se pueden escoger cuatro hierbas de ocho disponibles para hacer una mezcla?

Ejercicio 27. Halle el valor de m que verifique la ecuación $C_{m,2} = 36$.



Ingresa al siguiente enlace y encontrarás un video tutorial sobre los temas desarrollados hasta el momento en el apunte:

[Permutaciones, variaciones y combinaciones.](#)



Práctica de Combinatoria

Ejercicio 28. Con una baraja de 52 cartas, ¿cuántas manos distintas de 5 cartas pueden darse?

Ejercicio 29. Un estudiante universitario tiene 5 camisas, 3 pantalones y 2 pares de zapatos. ¿Cuántos conjuntos diferentes de una camisa, un pantalón y un par de zapatos puede usar?

Ejercicio 30. Para un festival a beneficio, en una escuela actuarán siete bandas de rock. ¿De cuántas maneras podrán ordenarse para salir al escenario?

Ejercicio 31. Una prisión tiene seis celdas individuales. Llegan tres prisioneros. ¿De cuántas formas pueden distribuirse?

Ejercicio 32. ¿Cuántos números pares de cuatro cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 4, 5, 7 y 9?

Ejercicio 33. Un pediatra le permite a un niño que se porta bien seleccionar dos juguetes de plástico cualesquiera, de cinco pequeños para llevar a la casa. ¿Cuántas selecciones son posibles?

Ejercicio 34. Martín tiene cinco libros: Matemática, Geografía Argentina, Geografía Mundial, Biología y Derecho.

a) ¿De cuántas maneras puede acomodar sus libros en una estantería?

b) ¿De cuántas maneras puede acomodar sus libros, pero con la condición de que los dos de Geografía estén siempre juntos?

Ejercicio 35. ¿De cuántas formas pueden asignarse tres puestos de trabajo diferentes entre cinco personas?

Ejercicio 36. Un marino tiene cuatro banderas distintas para hacer señales. ¿Cuántas señales diferentes puede hacer si coloca tres banderas en un mástil una sobre otra?

Ejercicio 37. En una clase de diez alumnos, van a distribuirse tres premios. Calcule de cuántas maneras puede realizarse la distribución si:

- a) los premios son diferentes.
- b) los premios son iguales.

Ejercicio 38. Obtenga el número de diagonales del polígono que tiene:

- a) 4 lados.
- b) 5 lados.
- c) 6 lados.
- d) n lados.

Ejercicio 39. Se deben ubicar cinco varones y cuatro mujeres en una fila de modo tal que las mujeres ocupen las posiciones pares. ¿De cuántas maneras puede realizarse la ubicación?

Ejercicio 40. Cuatro libros de matemática, seis de física y dos de química deben ser colocados en una estantería. Determine cuántas formas de ubicación serán posibles de acuerdo con las siguientes condiciones:

- a) Los libros de cada materia deben estar juntos.
- b) Sólo los libros de física deben estar juntos.

Ejercicio 41. Una línea de ferrocarril tiene doce estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes habrá que imprimir si en cada billete se detalla la estación de origen y la de destino?

Ejercicio 42. Tres atletas participan en una competición. ¿De cuántas maneras pueden llegar a la meta? Considere que pueden llegar juntos de a dos, o inclusive los tres a la vez.

Ejercicio 43. ¿Cuántos boletos distintos de loto pueden jugarse? (el juego "loto" consiste en elegir seis números enteros entre 0 y 41)

Ejercicio 44. Encuentre el valor de n en los siguientes casos:

$$a) n - 1 = \frac{7! \cdot 3!}{5!}$$

$$b) \frac{n!}{(n-1)!} + 16 = \frac{5!}{3!}$$

Ejercicio 45. Resuelva las siguientes situaciones problemáticas:

- a) Luego de un amistoso de voley, los jugadores de ambos equipos posan para una foto. ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse los n jugadores de cada equipo?
- b) Los alumnos de 6to año organizan un torneo de truco para recaudar fondos para su viaje a Bariloche. Se presentan 8 personas que desean participar. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar con ellas?
- c) ¿Cuántos números distintos de seis cifras distintas, se pueden formar utilizando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son menores a 290000?

7. NÚMEROS COMBINATORIOS

Sean n y r dos números enteros no negativos, con $r \leq n$. El número combinatorio $\binom{n}{r}$ se lee "n sobre r" y es igual a $\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

A n se lo llama numerador y a r , denominador.

7.1. Propiedades

Pueden demostrarse las siguientes propiedades:

a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ propiedad de simetría

Ejemplo $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$

Demostración:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \binom{n}{n-r}$$

b) $\binom{n}{n} = 1$ primer caso particular

Ejemplo $\binom{8}{8} = 1$

Demostración:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!.0!} = \frac{n!}{n!.1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

c) $\binom{n}{0} = 1$ segundo caso particular

Ejemplo $\binom{12}{0} = 1$

d) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ recurrencia

Ejemplo $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$

Ejercicio 46. Calcule usando la definición, el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{9}{4}$ b) $-2 \cdot \binom{5}{2}$ c) $\binom{9}{5}$ d) $\binom{9}{0}$

Ejercicio 47. Dado el número combinatorio $\binom{n}{r}$, demuestre que:

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

Ejercicio 48. Calcule las siguientes operaciones:

a) $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2}$

b) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$

c) $\frac{\binom{8}{5}}{\binom{3}{1}}$

Ejercicio 49. Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\binom{n}{n-2} = 45$

b) $\binom{n}{n-1} = 15$

Ejercicio 50. Determine los valores de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{m}{m}$

b) $\binom{m}{0}$

c) $\binom{0}{0}$

d) $\binom{m}{1}$

Ejercicio 51. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique la respuesta:

a) $\binom{t}{5} \cdot \binom{t}{5-t}$

b) $\binom{2}{2} = 1$

c) $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$

d) $\binom{8}{5} = \binom{7}{5} - \binom{7}{4}$

Ejercicio 52. Dado el combinatorio $a = \binom{8}{5}$

a) Si $b = \binom{8}{x}$, ¿Cuánto puede valer $x \neq 5$ para que $a = b$?

b) Use la propiedad de recurrencia para escribir el número a como suma de dos combinatorios.

c) Utilice la propiedad de recurrencia para escribir el número a como suma de tres combinatorios.

7.2. Triángulo de Pascal o de Tartaglia

El triángulo de Pascal es un triángulo de números enteros, infinito y simétrico. Para construirlo, se empieza colocando un 1 en la primera fila, y en las filas siguientes se van colocando números de forma que cada uno de ellos sea la suma de los dos números que tiene en la fila superior y que convergen hacia él.

Se supone que los lugares fuera del triángulo contienen ceros, de forma que los bordes del triángulo están formados por unos.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
 \end{array}$$

Relación del triángulo de Pascal con los números combinatorios

El triángulo de Pascal se relaciona con los números combinatorios ya que, dado un n determinado, el combinatorio $\binom{n}{r}$ se encuentra en la fila $(n + 1)$ en el lugar $(r + 1)$.

Ejemplo

Si $n = 5$ el combinatorio $\binom{5}{2} = 10$ se encuentra en la fila seis ($n + 1$) en el tercer lugar ($r + 1$):

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
 \end{array}$$

En general:

$$\begin{array}{cccccc}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
 \end{array}$$

8. BINOMIO DE NEWTON

Supongamos un binomio $(x + a)$, siendo x una variable y a un número real. Sabemos que si queremos calcular su cuadrado, $(x + a)^2$, por definición de cuadrado, esto es $(x + a) \cdot (x + a)$, y por ser número reales podemos aplicar la propiedad distributiva de la forma:

$$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a) = x^2 + x \cdot a + a \cdot x + a^2$$

Agrupando convenientemente, llegamos a que $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

Comúnmente, este cálculo se simplifica en una regla llamada *Cuadrado de un Binomio*, que indica que al elevar un binomio al cuadrado se obtiene una suma entre el cuadrado del primer término, el doble (por 2) producto entre ambos términos y el cuadrado del segundo.

Analicemos el cuadrado del binomio:

- El resultado es un trinomio, es decir, un polinomio de tres términos.
- El coeficiente del término cuadrático es 1.
- El coeficiente del término lineal es 2.
- El término independiente es a^2 , cuyo coeficiente es 1.

Desarrollemos ahora: $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

ÁLGEBRA 2

El coeficiente de x^3 es 1, que coincide con $\binom{3}{0} = 1$

El coeficiente de x^2 es 3, que coincide con $\binom{3}{1} = 3$

El coeficiente de x es 3, que coincide con $\binom{3}{2} = 3$

El coeficiente de a^3 es 1, que coincide con $\binom{3}{3} = 1$

Dado el binomio $(x + a)$ del cual se quiere conocer una potencia n , puede obtenerse $(x + a)^n$ de la siguiente manera:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot a \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} \cdot a^{n-2} \cdot x^2 + \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot x + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

y a dicho desarrollo se lo denomina *Binomio de Newton*.

Ejemplo

$$(x + 2)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^4 + \binom{4}{1} \cdot 2 \cdot x^3 + \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot x^2 + \binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot x + \binom{4}{4} \cdot 2^4 =$$

$$= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot 2 \cdot x^3 + 6 \cdot 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 8 \cdot x + 1 \cdot 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

y entonces $(x + 2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

Ejercicio 53. Desarrolle la potencia cuarta del binomio $(x + a)^4$

- ¿Cuántos términos tiene el desarrollo?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^4 ?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^3 ?
- ¿Cuál es el coeficiente de x^2 ?
- ¿Cuál es el coeficiente de x ?
- ¿Cuál es el término independiente y su coeficiente?

Ejercicio 54. Desarrolle las siguientes potencias:

a) $(x + \frac{1}{2})^5$ b) $(x - 2)^3$ c) $(x + 3y)^4$ d) $(x - 2y)^5$

Ejercicio 55. Encuentre:

- el cuarto término de $(3x + \frac{1}{4})^5$
- el Segundo término de $(2x - 3y)^4$
- el cuarto término de $(x - 2y)^6$
- el séptimo término de $(x + 1)^8$

Ejercicio 56. Encuentre el término que contiene a x^4 en el desarrollo de $(2x + 4)^6$.

Ejercicio 57. Encuentre el término que contiene a y^3 en el desarrollo de $(2xy + y)^5$.



EJERCICIOS INTEGRADORES
UNIDADES 6 Y 7
INDUCCIÓN COMPLETA
CONTEO

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

Ejercicio 1. Pruebe por inducción completa la siguiente propiedad:

$$1 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

Ejercicio 2. Probar por inducción que:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1} = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1 - (n+1)3^n + n \cdot 3^{n+1}}{4}$$

Ejercicio 3. Se pretende probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $5^n \geq 2^n + 3^n$ y lo haremos por inducción, y entonces se procede de la siguiente manera:

• $P(1): 5^1 \geq 2^1 + 3^1$ verdadera (1)

• $P(k): 5^k \geq 2^k + 3^k$ verdadera (2)

$P(k+1): 5^{k+1} \geq 2^{k+1} + 3^{k+1}$ (3)

$$\underbrace{5^{k+1}}_{(4)} = \underbrace{5 \cdot 5^k}_{(5)} \geq \underbrace{5 \cdot (2^k + 3^k)}_{(6)} = \underbrace{5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k}_{(7)} \geq \underbrace{2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k}_{(8)} = \underbrace{2^{k+1} + 3^{k+1}}_{(9)} \Rightarrow 5^{k+1} \geq 2^{k+1} + 3^{k+1}$$

Explique en lenguaje natural (con tus palabras) cada paso indicado del (1) al (9).

Ejercicio 4. Determine la característica de n que hace que $\binom{n}{0} + \binom{n}{n-1}$ sea:

- a) un número par b) un múltiplo de 10.

Ejercicio 5. Resuelva la siguiente ecuación: $V_{n,2} + \binom{n}{2} = 2n + 33$

Ejercicio 6. Demuestre la propiedad siguiente: $\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$

Ejercicio 7. Utilizando los dígitos 1 - 3 - 6 - 8 - 9

- a) ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse sin repetir ningún dígito?
- b) ¿Cuántos de ellos son mayores a 30000?
- c) Si se ordenan de menor a mayor, ¿en qué lugar se encuentra el número 86139?
- d) ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse si se pueden repetir las cifras?

Ejercicio 8. En un festival se proyectarán siete películas de las cuales 3 son argentinas, y el resto, extranjeras:

Películas argentinas: El ángel - Las grietas de Jara - Mi obra maestra

Películas extranjeras: Una mujer fantástica - La visita - Machuca - Gloria

Se deben proyectar las 7, obviamente una vez cada una. Calcule de cuántas formas se puede realizar la proyección si:

- No existe ninguna condición.
- La primera que se proyecta, debe ser argentina.
- Primero deben proyectarse las películas argentinas, y luego las extranjeras.

Ejercicio 9. Utilice el principio de inducción completa para probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\frac{1}{1 \cdot (1 + 1)} + \frac{1}{1 \cdot (2 + 1)} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{(n + 1)}$$

Ejercicio 10. Utilice el principio de inducción completa para probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$(1 \cdot 2) + (2 \cdot 2^2) + (3 \cdot 2^3) + \dots + (n \cdot 2^n) = (n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

Ejercicio 11. Resolver lo pedido en cada enunciado:

- En símbolos, el método de inducción completa dice que:

$$\left. \begin{array}{l} P(1) \text{ verdadera} \\ P(k) \text{ verdadera} \Rightarrow P(k + 1) \text{ verdadera} \end{array} \right\} \Rightarrow P(n) \text{ verdadera} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Explique en lenguaje natural.

- Dada la siguiente analogía: “El método de inducción se puede comparar con la caída completa de un dominó infinito: Si nos aseguramos que 1) La primera ficha caiga y 2) Al caer cualquier ficha, nos aseguramos que caiga la que le sigue; entonces el dominó caerá por completo”.

Identifique quién es $P(1)$, $P(k)$, $P(k + 1)$ y $P(n)$ todas verdaderas.



MODELOS DE EXAMENES

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

MODELO 1 EXAMEN FINAL

ESTUDIANTE:

1) Sea $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de 2×2 con elementos reales.

La estructura $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}); +)$ es un grupo.

a) Sea $H = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$ pruebe que la suma ordinaria de matrices es una ley de composición interna en H .

b) ¿Cuál es la condición suficiente para probar que un conjunto $S \subseteq G$ es subgrupo de G respecto de $*$?

c) Utilice la condición anterior para probar que H es subgrupo de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

d) Sea la función $f: H \rightarrow H$ cuya ley es $f(A) = A^t$, pruebe que la misma es un homomorfismo de grupos con la operación suma de matrices para ambos conjuntos.

e) ¿Qué es el núcleo de un homomorfismo? ¿Puede ser un conjunto vacío? Justificar.

f) Determine el conjunto imagen del homomorfismo del punto d).

2) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halle su inversa previa prueba de que existe.

b) Caracterice a la matriz identidad I del mismo orden que A

c) Determine si es posible resolver $A \cdot B_{2 \times 3}$. Justificar.

d) Modifique una línea de A para que su rango sea 2. Justificar.

3) En clase demostramos la implicancia: $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{A_D}{|A|}$.

a) para su demostración, se plantea un producto. ¿cuál es y a qué se arriba que da ese producto?

b) ¿la implicancia solamente se cumple en ese sentido?

4) Determine las soluciones del siguiente sistema:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

5) Dado un sistema de ecuaciones S de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

a) Escríbalo en forma genérica.

b) Escriba a su matriz de los coeficientes y matriz ampliada.

c) ¿Cómo resulta el sistema en el caso en que el rango de la matriz de los coeficientes, resulte igual al rango de la matriz ampliada, pero menor al número de incógnitas? ¿Qué teorema lo asegura?

6) Resuelva las siguientes cuestiones:

- Determine el conjunto solución de la ecuación $V_{n,2} = 2 \cdot \binom{n}{0} + 14n$
- ¿cuántos triángulos pueden formarse con 12 puntos del plano nunca alineados de a tres?
- Pruebe aplicando definición de número combinatorio, que $\binom{m}{n} - \binom{m}{m-n}$ es siempre un valor constante.
- Halle el término que contiene a x^{12} en el desarrollo de $(2x^2 + 3y)^8$

7) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas:

- Todo anillo tiene elemento neutro para la operación producto.
- Existe la división entre el número 4 y el valor $|A| - |A^t|$
- Si un sistema de ecuaciones es homogéneo, entonces los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada pueden diferir en una unidad.
- Para probar que el elemento neutro es único para todo un conjunto, y determinada operación, se trabaja suponiendo que hay dos y se llega a la conclusión que ellos deben ser distintos entre sí.
- $V_{m,n} = P_n \cdot C_{m,n}$
- Dos matrices cuadradas siempre pueden multiplicarse entre sí.

8) Pruebe por inducción completa: $n^3 - n$ es divisible por 3 $\forall n \in \mathbb{N}$.

MODELO 2 EXAMEN FINAL

ESTUDIANTE:

1) Se tienen las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, y $B = \mathbb{O}$ (matriz nula)

a) Puede probarse que A no admite inversa.

i) ¿cómo? Hacerlo.

ii) ¿esta condición es necesaria, suficiente o ambas?

iii) Para probar un sentido de la condición se plantea $A \cdot adj(A)$ ¿quién es y cómo es $adj(A)$?
¿a qué se arriba?

b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$:

i) Utilice el teorema de Rouché para clasificar el sistema.

ii) Halle las soluciones del mismo.

c) Si $C = A + A^t$, hallar las siguientes matrices, explicando para todas por qué fue posible hallarlas:

i) C

ii) C^{-1}

iii) $C \cdot A$

2) Se tienen las 12 cartas de un palo de la baraja española, por ejemplo, de oro:

1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - Sota - Caballo - Rey (estas tres últimas se llaman "figuras")

Determinar:

a) de cuántas formas pueden ordenarse las 12 cartas en una fila.

b) de cuántas formas pueden ordenarse las 12 cartas en una fila, si las figuras deben estar juntas.

c) cuántas manos posibles de cuatro cartas son posible obtener con esas 12 cartas.

d) de cuántas formas se pueden ordenar en una fila 7 de las 12 cartas.

3) Sea $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } x \in \mathbb{R} \right\}$. Se pide:

a) Explique si la matriz identidad y la matriz nula pertenecen al conjunto H .

b) La dupla $(H; +)$ es un grupo, siendo $+$ la suma ordinaria entre matrices. ¿Por qué? ¿Es abeliano?
Justificar

c) Sea $*$ una operación.

i) ¿cuándo decimos que la misma es una ley de composición interna? Explicarlo y escribirlo en forma simbólica.

ii) Probar que si $*$ es el producto ordinario de matrices, entonces el mismo es una ley de composición interna en H .

d) Sea e el elemento neutro de una operación.

- i) ¿de qué suposición se parte para demostrar que el mismo es único y a qué se arriba como conclusión?
- ii) Determine si el producto de matrices admite neutro en el conjunto.

4) Resolver las siguientes cuestiones:

a) Justificar en forma completa por qué la terna $(\mathbb{R}; +; \cdot)$

- i) es un anillo
- ii) es un anillo sin divisores de cero

b) ¿cuándo se dice que un sistema es homogéneo? ¿qué características tienen este tipo de sistemas?

c) Pruebe para una matriz genérica de 2×2 la relación que existe entre su determinante y el de su traspuesta.

d) Defina número combinatorio “ n sobre k ” (forma de cálculo y condiciones para n y k)

e) Pruebe a qué es igual siempre el número combinatorio donde numerador y denominador son iguales.

5) Respecto del principio de inducción:

a) Explique brevemente en qué consiste el mismo.

b) Utilícelo para demostrar que:

$$\sum_{k=1}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

La bibliografía recomendada para la cátedra puede obtenerse en el programa de estudio y en el programa de contenidos.