

complementos de cálculo

1. Ecuaciones Diferenciales

1. DEFINICIÓN

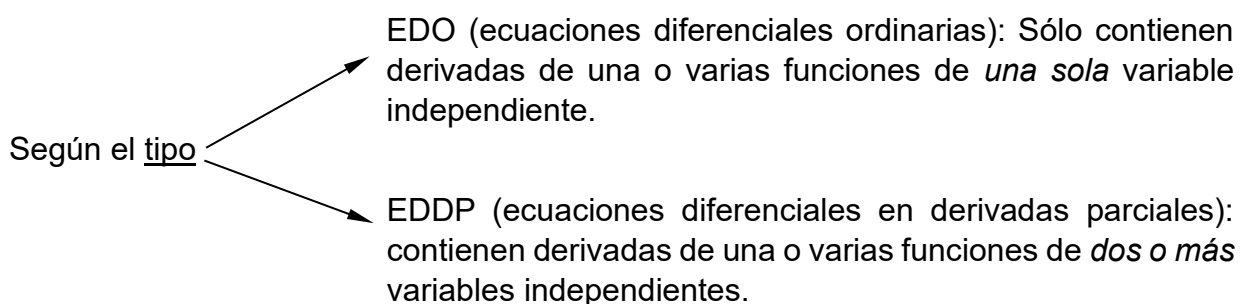
Se llama *ecuación diferencial* a toda ecuación que contiene a las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes. En otras palabras, una ecuación diferencial es una igualdad que se cumple para un conjunto de leyes de determinadas funciones.

Ejemplo:

1) La ecuación $y'' + 2xy' - 4y = \text{sen}(x)$ es una ecuación diferencial en la que la función incógnita es y que depende de una única variable x . Es decir, $y = f(x)$.

2. CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse según el *tipo* y el *orden*:



Se denomina orden al mayor orden de derivación con el que aparece la función incógnita.

Ejemplos:

- 2) La ecuación diferencial $x \cdot y' + 2xy = 0$ es ordinaria y de orden 1.
- 3) La ecuación diferencial $y''' - \text{sen}(xy) = x$ es ordinaria y de orden 3.
- 4) La ecuación diferencial $u_x + u_{yy} = 0$ es en derivadas parciales y de orden 2.

En este curso, trabajaremos con ecuaciones como las de los ejemplos 1 a 3, pues aún no hemos estudiado el concepto de derivada parcial, que se desarrollará en la unidad 4.

3. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Dada una ecuación diferencial ordinaria de orden n , en general, la misma puede expresarse de la forma:

$$F(x; y; y'; \dots; y^{(n)}) = 0$$

Diremos que una función φ , definida en algún intervalo abierto I es *solución de la ecuación diferencial* en dicho intervalo, si y solo si:

- φ es n veces derivable en I , y
- $F(x; \varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n)}(x)) = 0$

Ejemplo:

- 5) La ecuación diferencial $2 \cdot y'' \cdot \cos(x) + y^2 = [y - \cos(x)]^2 - (y')^2$ tiene como solución a la función escalar de ley $y = \text{sen}(x)$. (¿por qué?)

Existen tres tipos de soluciones para una EDO:

Solución general: es la familia de funciones soluciones de la ecuación diferencial, quién queda en función de n valores constantes.

Solución particular: cuando se dan valores específicos (condiciones iniciales) en forma arbitraria, se obtiene una solución particular de la familia de soluciones desde la solución general.

Solución singular: en algunos casos, se obtiene una solución que no pertenece a la familia de la solución general.

A continuación, estudiaremos las ecuaciones más comunes del tipo ordinaria y de orden uno:

4. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es de primer orden, si puede expresarse de la forma $F(x; y; y') = 0$, en forma implícita, o bien $y' = f(x; y)$, en forma explícita. En esta ecuación, $y = y(x)$ es la ley de la función incógnita.

A continuación, veremos algunos tipos de EDO particulares, así como la resolución que se suele utilizar en cada uno de los casos.

Antes, vamos a aclarar lo siguiente: estos métodos de resolución nos permitirán obtener lo que se conoce como *solución general* de la ecuación, es decir una familia de curvas. Pero, si además en particular queremos calcular la solución para el caso en que $y(x_0) = y_0$, estamos ante lo que se conoce como *problema de valores iniciales*, lo que nos permite hallar una *solución particular* de la misma.

4.1. EDO A VARIABLES SEPARABLES

Son aquéllas que pueden reducirse a la forma:

$$y' = \frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$$

Se resuelven ordenando los diferenciales con las variables correspondientes en un mismo miembro de la ecuación, y luego, integrando:

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x) \cdot dx$$

Ejemplo:

6) Identificar el tipo y resolver la ecuación $x dy - y^2 dx = 0$

A la expresión $x dy - y^2 dx = 0$ también la podemos escribir $x dy = y^2 dx$.

Luego, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y^2$ y notemos que esta ecuación es de la forma $y' = P(x) \cdot Q(y)$ con $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(y) = y^2$. Luego, la ecuación es a variables separables.

Resolución

Tomamos la ecuación dada:

$$x dy = y^2 dx$$

Agrupamos cada variable con su diferencial:

$$\frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{x} dx$$

Integramos ambos miembros:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Resolvemos dichas integrales:

$$-\frac{1}{y} = \ln|x| + C_1$$

Llamamos $C_1 = \ln(C)$:

$$-\frac{1}{y} = \ln|x| + \ln(C)$$

Usamos propiedad de logaritmos:

$$-\frac{1}{y} = \ln(C \cdot |x|)$$

Si es posible, explicitamos y :

$$y = -\frac{1}{\ln(C|x|)}$$

Y finalmente, hemos encontrado la familia de soluciones de la EDO dada.

Actividad 1. Probar que las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden son a variables separables, y resolverlas.

a) $y' = x^2 \cdot y^2$

b) $x^3 dx + (y + 1)^2 dy = 0$

c) $-xe^x dx + y dy = 0$

d) $(1 + x^3) dy - x^2 y dx = 0$

Actividad 2. Determinar para la ecuación diferencial del inciso 1.a., si existe alguna solución de la familia de soluciones que contenga al punto $(1; -1)$; es decir si alguna de las soluciones satisface la condición inicial $y(1) = -1$.

Actividad 3. Determinar para qué valor de m la siguiente ecuación diferencial de primer orden resulta ser a variables separables, y para dicho valor hallar la familia de soluciones:

$$2dy - \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}} + x^m \right) dx = 0$$

4.2. EDO HOMOGÉNEAS

Si la ecuación puede expresarse $y' = f(x; y)$, se plantea $f(tx; ty)$ con $t > 0$. Si sucede que:

$$f(tx; ty) = f(x; y)$$

entonces la ecuación diferencial es homogénea. Las ecuaciones diferenciales homogéneas, también pueden expresarse de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Se resuelven mediante la sustitución:

$$y = u \cdot x$$

donde $u = u(x)$, con lo cual se logra convertirla en una ecuación A.V.S. y se resuelve de la forma vista anteriormente.

Ejemplo:

7) Identificar el tipo y resolver la ecuación $y' = \frac{3x+y}{x}$.

Como sucede que

$$f(tx; ty) = \frac{3 \cdot (tx) + (ty)}{tx} = \frac{t \cdot (3x+y)}{tx} = \frac{3x+y}{x} = f(x; y),$$

luego la ecuación diferencial es homogénea.

Resolución

Tomamos la ecuación dada:

$$y' = \frac{3x+y}{x}$$

Utilizamos la sustitución $y = u \cdot x$:

$$[u(x) \cdot x]' = \frac{3x+u(x) \cdot x}{x}$$

Trabajamos ambos miembros:

$$u' \cdot x + u \cdot 1 = \frac{x \cdot (3+u)}{x}$$

Luego:

$$u' \cdot x + u = 3 + u$$

O también:

$$u' \cdot x = 3$$

Esta ecuación es A.V.S. Agrupamos variable con diferencial:

$$du = \frac{3}{x} dx$$

Integramos ambos miembros:

$$\int du = \int \frac{3}{x} dx$$

Resolvemos las integrales:

$$u = \ln(C \cdot |x|^3)$$

Finalmente, como $y = u \cdot x$:

$$y = x \cdot \ln(C \cdot |x|^3)$$

Y hemos encontrado la familia de soluciones de la EDO dada.

Actividad 4. Probar que realizando la sustitución:

$$y = u \cdot x$$

una ecuación del tipo $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ se convierte en una ecuación diferencial AVS.

Actividad 5. Dada la ecuación diferencial $y' = \frac{x+y}{x}$:

- Probar que es homogénea.
- Hallar su solución general.
- Hallar la solución particular que satisface la condición $f(e) = 0$.

Actividad 6. Resolver las siguientes EDO de primer orden homogéneas.

a) $x dy - y dx - \sqrt{x^2 - y^2} dx = 0$ con $x > 0$

b) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

4.3. EDO LINEALES

Son aquéllas que pueden reducirse a la forma:

$$y' + P(x).y = Q(x)$$

Puede demostrarse que la solución de una ecuación de este tipo está dada por:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + C \right]$$

Ejemplo:

8) Identificar el tipo y resolver la ecuación $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{5}x^3$ con $x > 0$

Es lineal, con $P(x) = \frac{3}{x}$ y $Q(x) = \frac{2}{5}x^3$.

Resolución

$$y = e^{-\int \frac{3}{x}dx} \cdot \left[\int e^{\int \frac{3}{x}dx} \cdot \frac{2}{5}x^3 dx + C \right] = e^{-3 \cdot \ln(x)} \cdot \left[\int e^{3 \cdot \ln(x)} \cdot \frac{2}{5}x^3 dx + C \right]$$

$$= x^{-3} \cdot \left(\frac{2}{5} \int x^6 dx + C \right) = x^{-3} \cdot \left(\frac{2}{35} \cdot x^7 + C \right)$$

$$y = \frac{2}{35}x^4 + \frac{C}{x^3} \text{ con } x > 0$$

Actividad 7. Dada la ecuación diferencial lineal de la forma $y' + P(x).y = Q(x)$, multiplicar a toda la expresión por la función de ley $u = u(x)$. Deducir una forma posible para dicha ley y luego probar que la solución general viene dada por:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + C \right]$$

A esta deducción se la conoce como *método del factor integrante*.

Actividad 8. Dada la ecuación diferencial $y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$, se pide:

- Justificar por qué es lineal.
- Hallar su solución general.
- Determinar la solución particular que pasa por el punto (1; 5).

Actividad 9. Hallar la solución general de las siguientes EDO de primer orden lineales:

a) $y' + y = e^{-x} \cdot \text{sen}(x)$

b) $y' + \frac{4}{x}y = x^4$

c) $y' + 2xy = 2x$

4.4. EDO TIPO BERNOULLI

Son aquéllas que pueden reducirse a la forma:

$$y' + R(x).y = S(x).y^n,$$

con $n \neq 1$.

Se resuelven mediante la sustitución:

$$z = y^{1-n},$$

donde $z = z(x)$ con lo cual se logra convertirla en una ecuación lineal y se resuelve de la forma vista anteriormente.

Ejemplo:

9) Identificar el tipo y resolver la ecuación $y' + \frac{2}{x}y = xy^{\frac{1}{3}}$

La ecuación es de Bernoulli, con $R(x) = \frac{2}{x}$, $S(x) = x$ y $n = \frac{1}{3}$.

Resolución

La sustitución será: $z = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}}$ (1)

Se deriva z : $z' = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}.y'$ \Rightarrow $\frac{3}{2}z' = y^{-\frac{1}{3}}.y'$ (2)

Se divide toda la ecuación original por y^n : $\frac{y'+\frac{2}{x}y}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{xy^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{x}y^{\frac{2}{3}} = x$

Teniendo en cuenta (1) y (2) se obtiene la ecuación: $\frac{3}{2}z' + \frac{2}{x}z = x$

Multiplicando la ecuación por $\frac{2}{3}$, se obtiene la ecuación lineal: $z' + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x}z = \frac{2}{3}x$, en donde $P(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x}$ y $Q(x) = \frac{2}{3}x$.

Su solución está dada por $z = \frac{x^2}{5} + Cx^{-\frac{4}{3}}$. Finalmente, $y = \left(\frac{x^2}{5} + Cx^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Actividad 10. Dada la ecuación diferencial lineal de la forma

$$y' + R(x).y = S(x).y^n,$$

probar que la sustitución $z = y^{1-n}$ la convierte en lineal, y que para ello es necesario que $n \neq 1$.

Actividad 11. Dada la ecuación diferencial $y' + xy = xy^2$, se pide:

- Justificar por qué es de Bernoulli.
- Hallar su solución general.

Actividad 12. Hallar la solución general de las siguientes EDO de primer orden del tipo Bernoulli considerando para ambas $x > 0$:

a) $xy' + 2y = 2\sqrt{y}$

b) $y' = \frac{y^3 + 2xy}{x^2}$

4.5. EDO TIPO CLAIRAUT

Son aquéllas que pueden reducirse a la forma:

$$y = xy' + f(y')$$

Se resuelven mediante la sustitución:

$$y' = P,$$

donde $P = P(x)$.

Ejemplo:

10) Hallar las soluciones de la ecuación diferencial $y = xy' + \frac{1}{y'}$

Resolución

Se reemplaza $y' = P$, quedando:

$$y = x.P + \frac{1}{P} \quad (1)$$

Se deriva y , obteniéndose:

$$y' = 1.P + x.P' - P^{-2}.P'$$

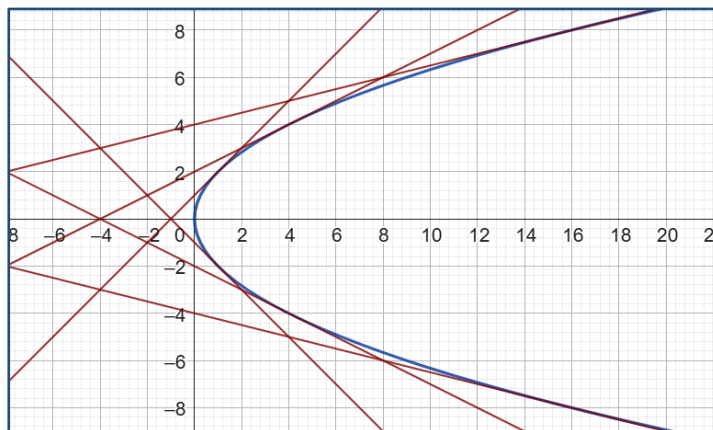
Como $y' = P$, entonces la ecuación anterior queda de la forma $P = 1.P + x.P' - P^{-2}.P'$, es decir $0 = x.P' - P^{-2}.P' \Rightarrow 0 = P'.(x - P^{-2})$

La ecuación anterior tiene dos posibles soluciones:

- Una de ellas se obtiene cuando $P' = 0$. Esto sucede si y sólo si $P = C$, reemplazando en (1) se obtiene $y = C.x + C^{-1}$ (solución general).
- La otra, $x - P^{-2} = 0$ de donde $P = \pm \sqrt{\frac{1}{x}}$, reemplazando en (1) se obtiene $x = \frac{y^2}{4}$ (solución singular).

Podemos observar que la solución general es un conjunto de rectas que difieren de la pendiente C y de la ordenada al origen C^{-1} .

Si graficamos este conjunto de rectas (solución general) y la solución singular, obtendremos la figura que se muestra a la derecha:



Como se puede observar, la solución general es una familia de rectas que son tangentes a la curva solución singular generando un efecto envolvente sobre la misma.

Supongamos para el ejemplo anterior que, de todas las rectas de la familia de rectas de la solución general, nos interesa aquella (o aquellas) que cumplan que pasan por el punto $(1; 2)$. Es decir, aquellas que verifiquen que $y(1) = 2$. Como ya hemos visto, a este requerimiento se lo denomina *condición inicial*. Para el caso del ejemplo, será: $2.C.1 + C^{-1} \Rightarrow C = 1$. Luego, la curva que cumplirá la condición inicial será $y = x + 1$, a la que se la denomina *solución particular*.

Actividad 13. Resolver las siguientes ecuaciones del tipo Clairaut:

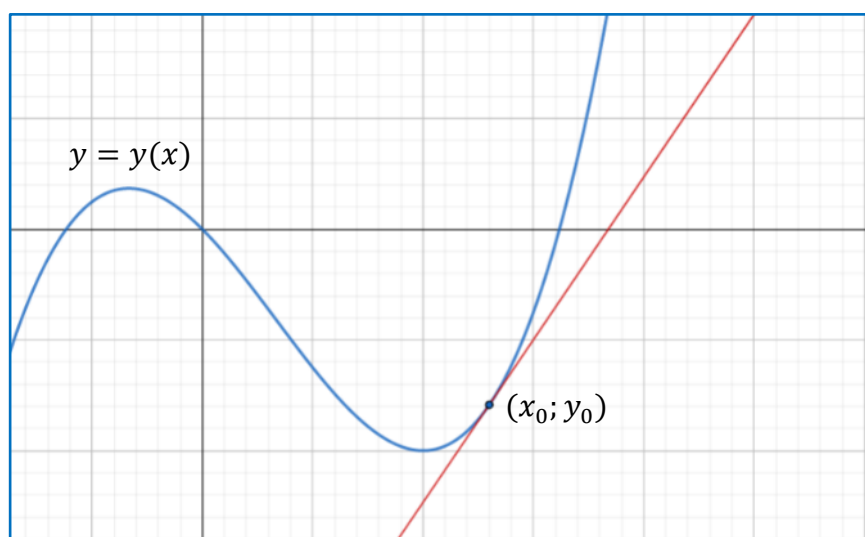
a) $y = xy' - (y')^2$

b) $-y'x + y = \ln(y')$

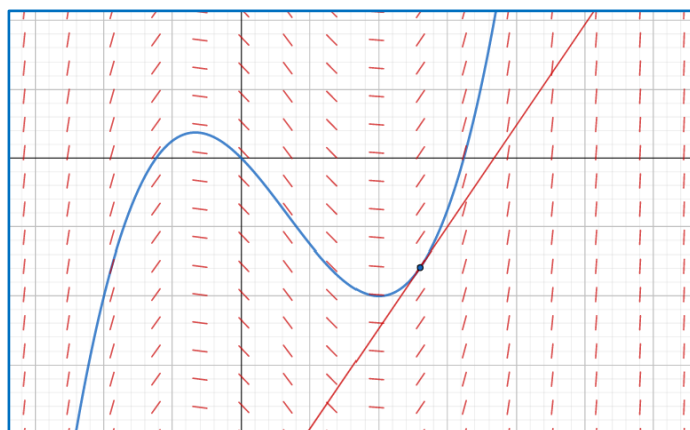
c) $y = (y')^3 + y'x$

5. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA EDO DE ORDEN 1

El caso más general de ecuación de primer orden está representado por la expresión $F(x; y; y') = 0$. Supongamos que podemos expresar a y' como $y' = f(x; y)$. La solución de la ecuación diferencial será una función escalar (en el caso en que y pueda escribirse como función de x) o una expresión de la forma $s(x; y) = 0$ (para el caso más general). Por lo tanto, podemos graficarla como una curva en el plano xy . Consideremos un punto $(x_0; y_0) \in \mathbb{D}_f$, tal que $y = f(x)$ es una solución que pasa por el punto $(x_0; y_0)$. La ecuación $y' = f(x; y)$ indica que $f(x_0; y_0)$ es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0; y_0)$.



Así, de la ecuación diferencial se conoce en cada punto del conjunto gráfica, una recta tangente. Esto lo podemos visualizar si en cada punto $(x; y)$ nos imaginamos un segmento con la dirección que $f(x; y)$ determina:



Un subconjunto del plano como éste, en el que para cada punto se ha definido una dirección, se llama *campo direccional de la ecuación diferencial*. El campo direccional nos permite inferir propiedades cualitativas de las soluciones. Además, sugiere un método gráfico para construir soluciones aproximadas de la EDO $F(x; y; y') = 0$.

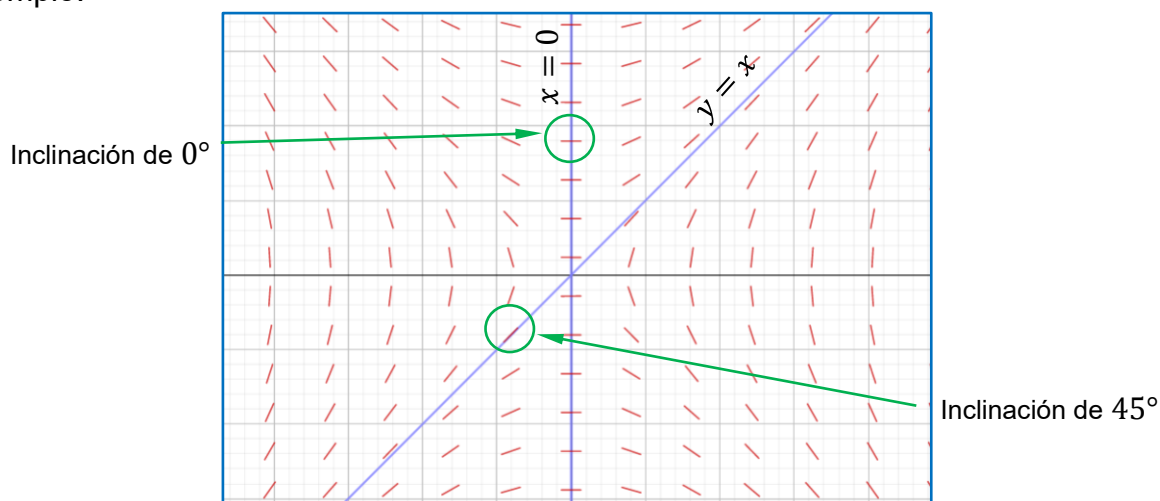
Ejemplo:

11) Supongamos la ecuación diferencial $y' = \frac{x}{y}$. Para hacernos una idea de su campo de direcciones, podemos proceder de la siguiente manera: le damos valores arbitrarios a y' .

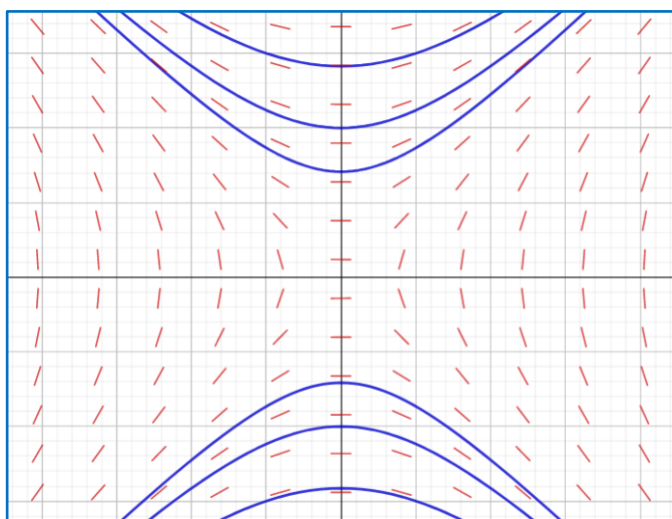
Por ejemplo, si $y' = 0$ resulta que $x = 0$. Esto nos da como información que en la curva de ecuación $x = 0$ (eje de las ordenadas), los segmentos tendrán una inclinación de 0° (porque la pendiente es 0).

Si en cambio $y' = 1$, entonces debe ser $y = x$. Por lo cual, sobre la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrante) los segmentos tienen una inclinación de 45° (porque la pendiente es 1), etc.

En la siguiente gráfica, se muestra el campo de direcciones para la EDO dada como ejemplo:



En este caso, podemos inferir que algunas soluciones de la ecuación diferencial estarán dadas por ramas de hipérbolas de ecuaciones $y = \sqrt{x^2 + C}$ e $y = -\sqrt{x^2 + C}$, como se puede observar en la siguiente figura:



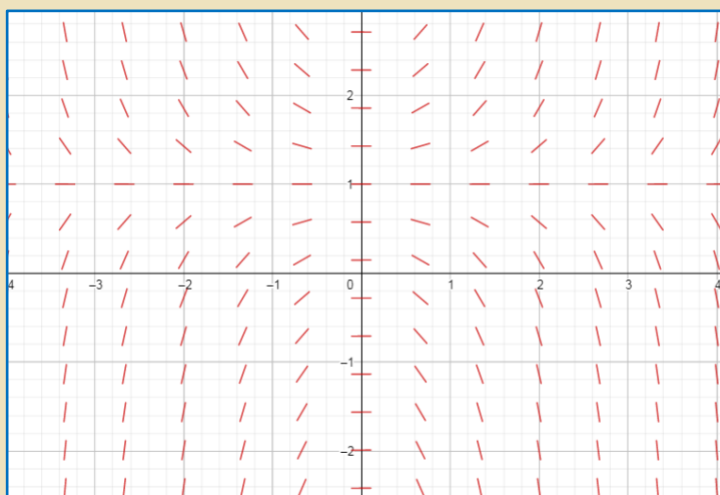
En general, puede comprobarse que cualquier hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = C$ es solución de la ecuación diferencial.

En el ejemplo anterior, habíamos visto que sobre la curva de ecuación $x = 0$ resultaba que $y' = f(x; y) = 0$; o que sobre $y = x$ resultaba que $y' = f(x; y) = 1$. A estas curvas para las que ocurre que $y' = f(x; y) = k$ se las denomina *curvas isóclinas*.

Ejemplo:

12) Para la misma ecuación diferencial del ejemplo 11, $y' = \frac{x}{y}$, sus isóclinas son todas rectas de ecuaciones $\frac{x}{y} = k$.

Actividad 14. Justificar apropiadamente si el siguiente campo de direcciones puede corresponder a la EDO $y' = xy + x$.



Actividad 15. Dada la EDO $y' = x - y$. Se pide:

- Utilizar un software para analizar su campo de direcciones.
- Hallar cuáles son las curvas isóclinas y graficar algunas de ellas.
- Predecir algunas curvas soluciones de la EDO.
- Encontrar las soluciones de la EDO utilizando algún método visto anteriormente.

6. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial ordinaria es de segundo orden a coeficientes constantes, si su expresión puede reducirse a la forma:

$$y'' + a_1y' + a_2y = B(x) \quad \text{con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

En primer lugar, vamos a clasificar a este tipo de ecuaciones, dependiendo del valor de la expresión $B(x)$. En el caso en que $B(x) = 0$, la EDO se llama *homogénea*, y en caso contrario, no *homogénea*. Analicemos cada caso:

6.1. EDO DE SEGUNDO ORDEN HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial de segundo orden lineal a coeficientes constantes es homogénea si se puede reducir a la forma:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \quad \text{con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Antes de analizar cómo resolver este tipo de ecuaciones, veamos el siguiente teorema:

Principio de superposición.

Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos soluciones *linealmente independientes* de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden dada por $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, entonces la combinación lineal $y = C_1 \cdot f(x) + C_2 \cdot g(x)$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación. Por otro lado, el número máximo de soluciones LI será dos.

Pensemos en una función cuya ley sea tal que pueda verificar la EDO de segundo orden. Por ejemplo, podría ser $y = 0$. Ésta es la solución más obvia (trivial) y por lo tanto la descartaremos del estudio. Una solución general no trivial de la ecuación es de la forma $y = e^{rx}$ (¿por qué?). El objetivo será entonces, hallar el valor de r .

De la solución general propuesta se tiene que $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$. Reemplazando en la ecuación, se tiene $r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_2e^{rx} = 0$, es decir $e^{rx} \cdot (r^2 + a_1r + a_2) = 0$. Ahora bien, como siempre resulta $e^{rx} \neq 0$, la única opción es que $r^2 + a_1r + a_2 = 0$. A

esta expresión se la denomina *ecuación característica* (E.C.) y es útil para hallar los valores de r . Como en toda ecuación cuadrática, pueden darse tres casos, que se analizan a continuación:

Caso 1: discriminante positivo.

Si sucede que $a_1^2 - 4a_2 > 0$, entonces los valores de r serán dos valores reales distintos r_1 y r_2 y se tendrán las soluciones $f(x) = e^{r_1x}$ y $g(x) = e^{r_2x}$. Éstas, son linealmente independientes pues la única forma de lograr que $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = 0$ es tomando $C_1 = C_2 = 0$. Por el principio de superposición, la solución general estará dada por la función combinación lineal de ambas funciones:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

Caso 2: discriminante nulo.

Si sucede que $a_1^2 - 4a_2 = 0$, entonces los valores r_1 y r_2 serán iguales (los llamaremos r). Pero ahora, las soluciones $f(x) = e^{rx}$ y $g(x) = e^{rx}$ no son linealmente independientes, pues para que $C_1e^{rx} + C_2e^{rx} = 0$ no necesariamente tiene que suceder que $C_1 = C_2 = 0$, sino que basta con que $C_1 = -C_2$. Para este caso, además de ser $f(x) = e^{rx}$ una de las soluciones, puede probarse que también lo es $h(x) = xe^{rx}$, por lo que la solución general estará dada por la combinación lineal de las dos soluciones linealmente independientes:

$$y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$$

Caso 3: discriminante negativo.

Por último, si sucede que $a_1^2 - 4a_2 < 0$, entonces los valores de r serán dos valores complejos de la forma $r = \alpha \pm \beta i$. Puede demostrarse que la solución general estará dada por:

$$y = e^{\alpha x} \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \text{sen}(\beta x)]$$

Lo anterior se deduce a partir de la notación de Euler.

Resumiendo:

Las soluciones de la ecuación característica son:	La solución de la ecuación diferencial es:
r_1 y r_2 , reales y distintas	$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
r_1 y r_2 , reales e iguales (r)	$y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$
$r = \alpha \pm \beta i$ complejas	$y = e^{\alpha x} \cdot [C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \text{sen}(\beta x)]$

Ejemplo:

13) La ecuación $y'' - 4y' + 13y = 0$ tiene a $y = e^{2x} \cdot [A \cdot \cos(3x) + B \cdot \sin(3x)]$ como solución general. Comprobarlo. ¿Es solución $y = e^{2x} \cdot [A \cdot \cos(-3x) + B \cdot \sin(3x)]$? ¿por qué?

Actividad 16. Encontrar la solución de las siguientes EDO de orden dos a coeficientes constantes homogéneas:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $y'' + 6y' + 9y = 0$ | b) $y'' + 4y = 0$ |
| c) $y'' - y' = 0$ | d) $y'' - 4y' + 3y = 0$ |
| e) $y'' - 2y' + y = 0$ | f) $y'' - 4y' + 13y = 0$ |

6.2. EDO DE SEGUNDO ORDEN NO HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial de segundo orden lineal a coeficientes constantes es no homogénea si se puede reducir a la forma:

$$y'' + a_1y' + a_2y = B(x) \quad \text{con } a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

donde $B(x)$ es una función de x no nula.

6.2.1. Solución de una EDO de segundo orden no homogénea

La ecuación general de esta ecuación no homogénea será la suma de la solución general de la homogénea asociada y la solución particular de la no homogénea. Es decir:

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH}$$

Actividad 17. Dada una ecuación diferencial de la forma $y'' + a_1y' + a_2y = B(x)$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, probar que si y_{GH} es solución de la EDO de segundo orden homogénea asociada e y_{PNH} es una solución particular de la EDO de segundo orden no homogénea, entonces $y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH}$ es solución de la ecuación dada.

Ya hemos visto cómo calcular la solución de una ecuación homogénea. Resta ver a continuación, cómo calcular la solución particular de la no homogénea.

6.2.2. Cálculo de la solución particular para una EDO de segundo orden no homogénea

Para los casos más generales, la función $B(x)$ puede asumir, entre otras, las siguientes formas:

- $B(x) = P_n(x)$: ser un polinomio de grado n .
- $B(x) = P_n(x) \cdot e^{Tx}$: ser un polinomio de grado n multiplicado por una función exponencial.

- $B(x) = A\cos(Mx) + B\sin(Mx)$: ser combinación lineal de funciones trigonométricas (senos y cosenos con la misma pulsación).
- $B(x)$ puede ser una combinación lineal de cualquiera de los tres casos anteriores.

Al método que se describe a continuación, se lo conoce como *método de los coeficientes indeterminados*. Se trata de un mecanismo para encontrar las soluciones particulares de acuerdo con la forma que tenga $B(x)$.

$$B(x) = P_n(x)$$

Se plantea la ecuación característica asociada a la homogénea. Puede suceder que:

"0" sea solución de la E.C.	"0" no sea solución de la E.C.
Se ensaya como solución $y = Q_n(x) \cdot x^h$	Se ensaya como solución $y = Q_n(x)$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P_n(x)$, y h es el orden de multiplicidad de la raíz $r = 0$ (que como máximo, en este caso puede ser 2, evidentemente).

Ejemplo:

14) Dada la ecuación $y'' - 4y' = x^2 - 5x$, se desea obtener su solución general.

y_{GH} EC: $r^2 - 4r = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = 4$ Luego, $y_{GH} = C_1 + C_2 \cdot e^{4x}$

y_{PNH} Como "0" es solución de la E.C., de orden de multiplicidad 1, es decir $h = 1$, se ensaya como solución: $y_{PNH} = x^1 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

Se buscan y' e y'' : $y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \Rightarrow y'' = 6Ax + 2B$

Reemplazando en la ecuación original, se tiene:

$$6Ax + 2B - 4 \cdot (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - 5x, \text{ de donde } A = -\frac{1}{12}, B = \frac{9}{16}, C = \frac{9}{32}.$$

$$\text{Luego, } y_{PNH} = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{32}x$$

y_{GNH} Por último, se obtiene $y_{GNH} = C_1 + C_2 \cdot e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{32}x$

Actividad 18. Hallar la solución general de:

a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$

b) $y'' - 2y' = 6$

c) $y'' = 2x + 4 - y'$

Actividad 19. Encontrar la solución particular de la ecuación $y'' + y' = 6x^2 + 6x$ que satisfice que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

$$B(x) = P_n(x) \cdot e^{Tx}$$

Se plantea la ecuación característica asociada a la homogénea. Puede suceder que:

"T" sea solución de la E.C.	"T" no sea solución de la E.C.
Se ensaya como solución $y = Q_n(x) \cdot e^{Tx} \cdot x^h$	Se ensaya como solución $y = Q_n(x) \cdot e^{Tx}$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio del mismo grado que $P_n(x)$, y h es el orden de multiplicidad de la raíz $r = T$ (que como máximo, en este caso puede ser 2).

Ejemplo:

15) Dada la ecuación $y'' - 2y' + y = x \cdot e^{3x}$, se desea obtener su solución general.

$$y_{GH} \quad y_{GH} = (C_1 + C_2x)e^x$$

$$y_{PNH} \quad y_{PNH} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{3x}$$

$$y_{GNH} \quad y_{GNH} = (C_1 + C_2x)e^x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{3x}$$

(comprobarlo)

Actividad 20. Hallar la solución:

a) general de $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$

b) general de $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

c) particular de $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ con $y(0) = y'(0) = 1$

$$B(x) = A\cos(Mx) + B\sin(Mx)$$

Se plantea la ecuación característica asociada a la homogénea. Puede suceder que:

" $\pm Mi$ " sea solución de la E.C.	" $\pm Mi$ " no sea solución de la E.C.
Se ensaya como solución $y = x \cdot [C \cdot \cos(Mx) + D \cdot \sin(Mx)]$	Se ensaya como solución $y = C \cdot \cos(Mx) + D \cdot \sin(Mx)$

Ejemplo:

16) Dada la ecuación $y'' + 4y = 3 \cdot \text{sen}(2x)$, se debe obtener se desea obtener su solución general.

$$y_{GH} = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \text{sen}(2x)$$

$$y_{PNH} = -\frac{3}{4}x \cdot \cos(2x)$$

$$y_{GNH} = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \text{sen}(2x) - \frac{3}{4}x \cdot \cos(2x)$$

(comprobarlo)

Actividad 21. Hallar la solución general de las ecuaciones:

a) $y'' + y = 3 \cos x - 4 \text{sen} x$

b) $y'' + 2y' + 10y = 4 \text{sen} 3x$

c) $y'' + y' = 2 \text{sen} x$

El método descrito anteriormente reduce su aplicación al caso en que la función B sea la suma o producto finito de constantes, polinomios, exponenciales de base e , senos y cosenos. La forma de resolverlas es utilizando los mismos criterios descritos anteriormente, teniendo en cuenta la forma que tiene el sumando correspondiente. A continuación, se muestra un ejemplo:

Ejemplo:

17) Dada la ecuación $y'' - y' = 2e^x + x^2 - 4$, se debe obtener se desea obtener su solución general.

$$y_{GH} = C_1 + C_2 \cdot e^x$$

Para ello, hemos encontrados las soluciones de la ecuación característica $r^2 - r = 0$, siendo éstas $r_1 = 0$, $r_2 = 1$.

Como $B(x)$ es la suma de dos funciones de las formas descritas en los casos 1 y 2, ensayaremos como solución:

$$y_{PNH} = A x e^x + x \cdot (B x^2 + C x + D) \quad \text{¿por qué?}$$

Los valores de las constantes son $A = 2$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = -1$ y $D = 2$.

Luego, la solución es $y_{PNH} = 2x e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$.

y_{GNH} Finalmente, $y_{GNH} = C_1 + C_2 \cdot e^x + 2xe^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$

Actividad 22. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - y' - 2y = e^{3x} + \text{sen}(2x)$

b) $y'' - y' = 2e^x + x$

Existe un método más general llamado *método de variación de parámetros*, que se deja para que el alumno profundice en el tema.

7. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

El método de los coeficientes indeterminados también puede aplicarse a ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas de grado mayor a 2. En tal caso, se procede de manera análoga a la resolución vista.

Actividad 23. Halle la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y^{(4)} - y = 0$

b) $y''' - 5y'' + 6y' = 2x - 1$

8. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Existe una gran variedad de problemas en los cuáles el objetivo consiste en conocer una magnitud variable respecto de otra/s magnitud/es que también varía/n. Es decir, problemas en los que se pretende conocer una función desconocida a partir de datos experimentales relacionados en una ecuación que contiene al menos una de las derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones son las ecuaciones diferenciales que estudiamos en este capítulo, que se plantearán de acuerdo con los datos que brinde el problema. A modo de ejemplo, analicemos las siguientes situaciones:

Ejemplo:

18) Modelo de crecimiento de población.

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que ésta crece con una rapidez directamente proporcional a su tamaño.

a) Enunciar la ecuación que describe este fenómeno.

b) Suponiendo que la población en el tiempo $t = 0$ fue de 1000 individuos y la tasa de crecimiento es $k = 0,2$ determinar la población en cualquier tiempo futuro teniendo en cuenta dichas condiciones iniciales. Interpretar gráficamente.

Vale aclarar que ésta, es una hipótesis razonable para una población de bacterias o de animales en condiciones ideales (medio ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad ante las enfermedades).

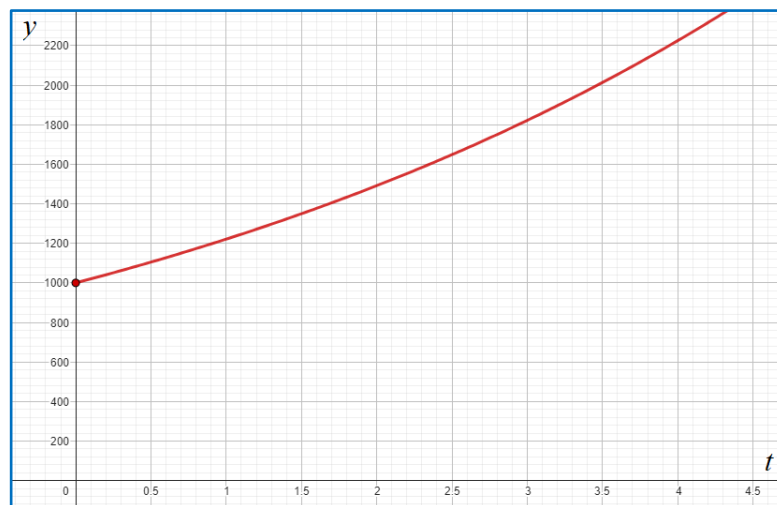
Resolución:

a) Sea $y = y(t)$ la cantidad de individuos en el tiempo t , según la hipótesis, la velocidad de crecimiento $y'(t)$ es directamente proporcional a la cantidad de individuos, es decir: puede escribirse $y'(t) = k \cdot y(t)$. Ésta es una ecuación diferencial a variables separables. Separando variables e integrando:

$$y'(t) = k \cdot y(t) \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dt}{k} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{k} \Rightarrow \ln(y) = \frac{kt}{k} + C_1 \Rightarrow y = e^{kt+C_1} = C \cdot e^{kt}$$

Así, resulta el modelo de crecimiento poblacional: $y_G = C \cdot e^{kt}$

b) La anterior sería la solución general, para el caso particular planteado, con $k = 0,2$ las condiciones iniciales $y(0) = 1000$ nos permite hallar C : $1000 = C \cdot e^{0,2 \cdot 0} = C$ resultando la solución particular: $y_G = 1000 \cdot e^{0,2 \cdot t}$



19) Movimiento de un resorte.

Consideremos un objeto de masa M , fijado a un extremo de un resorte indeformable, de constante de elasticidad k , cuyo otro extremo está fijado a una pared, y el mismo se desliza horizontalmente sobre el piso.

La masa está inicialmente en reposo y el resorte no está estirado.

Supongamos que por algún medio la masa se desplaza a una distancia x_0 en sentido positivo, desde el origen y se la suelta libremente con una rapidez inicial v_0 . Encontrar un modelo matemático que describa la posición de la masa M una vez que es soltado.

Resolución:

Ubicamos el origen de coordenadas del eje horizontal x coincidente con el centro de masa del objeto M cuando el resorte no está estirado. Por la segunda Ley de Newton:

$$-k \cdot x = M \cdot x'' \Leftrightarrow Mx'' + kx = 0 \quad \text{en donde la variable independiente es el tiempo } t$$

$$\text{E.C.: } Mr^2 + k = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{k}{M} \Rightarrow r_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}i \vee r_2 = -\sqrt{\frac{k}{M}}i \quad (\text{complejas})$$

$$\text{La solución general es: } x_{GH} = C_1 \cdot \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + C_2 \cdot \text{cos}\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

La pulsación $\sqrt{\frac{k}{M}}$ aumenta al aumentar la constante del resorte (más duro cuanto más grande es k) y disminuye al aumentar M (ya que aumenta la inercia).

Las condiciones iniciales nos permiten determinar las constantes de la solución particular:

$$x(0) = C_1 \cdot \text{sen}(0) + C_2 \cdot \text{cos}(0) = C_2 = x_0$$

$$x'(0) = C_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \text{cos}(0) - C_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \text{sen}(0) = C_1 \sqrt{\frac{k}{M}} = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 \sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$\text{Por lo que la solución particular resulta: } x_p = v_0 \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + x_0 \cdot \text{cos}\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

Actividad 24. Leer detenidamente los siguientes problemas que se modelizan utilizando ecuaciones diferenciales:

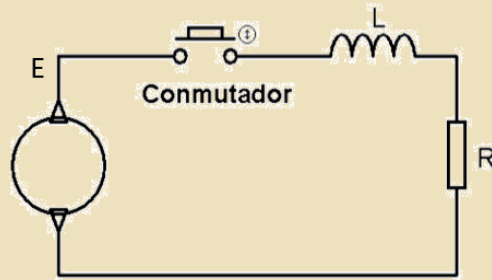
a) Desintegración radiactiva del plutonio.

Los núcleos de los materiales radiactivos se desintegran parcialmente con el tiempo, con una rapidez proporcional a la cantidad de material presente en cada instante, convirtiéndose en material estable no radiactivo. El tiempo que les toma a los materiales radiactivos para que la mitad de sus átomos decaiga en átomos estables se conoce como “la vida media” o “período de semidesintegración” del material.

El Plutonio 239 tiene una vida media de 25000 años. Modelar el comportamiento de 1000 gramos de Plutonio, encontrar la solución al problema, representar gráficamente este comportamiento y determinar aproximadamente el tiempo que se requiere para que el 90% del Plutonio haya desaparecido.

b) Circuito eléctrico RLC.

En un circuito serie compuesto por una resistencia, una inductancia y una fuente de alimentación $e(t)$ circula una corriente eléctrica cuya intensidad es $i(t)$, cuando se cierra el interruptor/conmutador.



Teniendo en cuenta que:

- La ley de Ohm establece que la diferencia de potencial que cae sobre una resistencia es proporcional a la intensidad de corriente (la constante de proporcionalidad es el valor óhmico de la resistencia).
- La ley de Faraday establece que la caída de tensión en una inductancia es proporcional a la rapidez de variación de la intensidad de corriente que la circula (la constante de proporcionalidad es el valor del coeficiente de autoinducción de la inductancia).
- La segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de todas caídas de tensión que se producen en un circuito serie es igual al voltaje provisto por la fuente de alimentación.

Se pide:

i) Encontrar un modelo matemático del cual se pueda deducir la intensidad de corriente en función del tiempo.

ii) En particular si el valor óhmico de la resistencia es de 12Ω (ohms), el coeficiente de autoinducción de la inductancia es de $4H$ (Henrys) y la fuente de alimentación es una batería que suministra un voltaje constante e igual a de $60V$ (voltios) y el interruptor se cierra cuando $t = 0$. ¿Cuál es la expresión temporal de la intensidad de corriente eléctrica por el circuito? (suponiendo que la corriente inicial es nula).

c) Movimiento de un cuerpo.

Consideremos un cuerpo de masa m al cual se le aplica una resistencia de frenado $F = \gamma_1 \cdot v + \gamma_2 \cdot v^n$ donde v representa la rapidez del cuerpo; γ_1 y γ_2 son constantes y n una constante distinta de cero y uno. Encontrar la rapidez del cuerpo en función del tiempo si en el instante inicial tiene una rapidez v_0 .

d) Aplicación geométrica.

El área de un triángulo, formado por la tangente a una curva buscada y los ejes coordenados es una magnitud constante. Hallar esta curva.

e) Movimiento de un resorte.

Un resorte en posición vertical, fijado en un extremo al techo, sufre un estiramiento de $0,5m$ cuando se le coloca en el otro extremo una masa de $2kg$ y se deja estabilizar el sistema. Si a continuación se estira el resorte hasta $0,7m$ y luego se suelta con una rapidez inicial de $0,2 m/s$ hacia arriba.

- i) Determinar la posición de la masa en cualquier tiempo t .
- ii) Graficar.

REVISIÓN FINAL DE LA UNIDAD

1) Dadas las siguientes ecuaciones de primer orden:

$$E_1: y' - 2y = 4e^{3x}$$

$$E_2: y = x \cdot y' - \frac{(y')^2}{4}$$

- a) Clasificar cada una de ellas, justificando la respuesta.
- b) Hallar las soluciones de ambas.
- c) Mostrar en un gráfico los tres tipos de soluciones que tiene la segunda.

2) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$E_1: y'' - 2y' = 2x^2 + x$$

$$E_2: y'' - 7y' + 12y = 12e^{3x}$$

3) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas:

a) Para resolver una ecuación diferencial de Bernoulli se utiliza la sustitución $z = y^{1-m}$ con el objetivo de obtener una ecuación diferencial homogénea.

b) La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy+y^2}{x+y}$ es homogénea.

c) Según el método de los coeficientes indeterminados, para la ecuación diferencial $y'' - 4y = (2x - 1)e^{2x}$ la solución que debe proponerse debe tener como ley una de la forma $y = (Ax^3 + Bx^2) \cdot e^{2x}$.

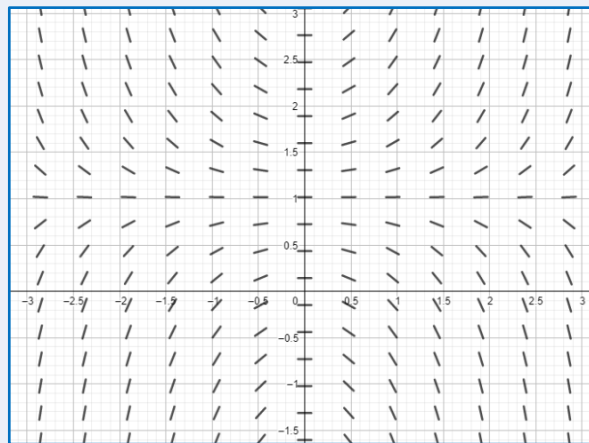
4) Proponer, justificando la respuesta una ecuación diferencial de primer orden que sea a variables separables, y otra que no lo sea.

5) Se tiene la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = xy - x$

a) Clasificarla y probar que su solución general está dada por curvas que siguen la ecuación:

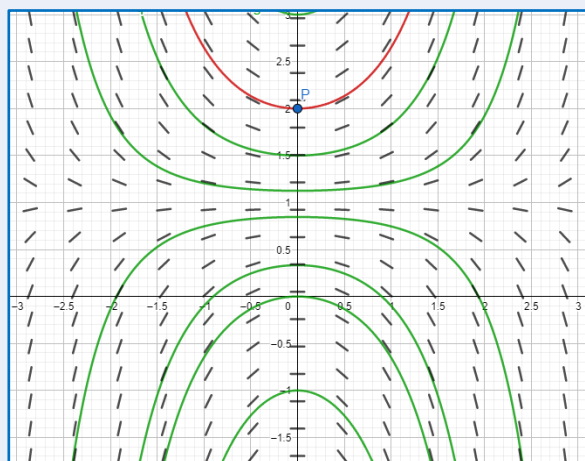
$$y = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

b) En el siguiente esquema se muestra el campo direccional de la ecuación dada, determinar analíticamente y comprobarlo gráficamente, aquellas regiones donde la inclinación del vector o segmento graficado sea horizontal. ¿Cómo se llaman a estas curvas que pasan por todos los puntos donde la inclinación de cada segmento es la misma?



c) En el mismo gráfico anterior, se grafican algunas curvas de la familia solución.

- i) ¿Qué relación geométrica hay entre la solución general y el campo de direcciones?
- ii) Supongamos estar interesados en aquella solución que contiene al punto $P(0; 2)$ y que se destaca en el gráfico. ¿cómo se llama a este tipo de solución?



6) Resolver las siguientes actividades conceptuales:

a) Si $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial no homogénea de orden 2 a coeficientes constantes $y'' + a_1y' + a_2 = B(x)$, entonces la función resta $r(x) = f(x) - g(x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada. Probarlo.

b) Utilizando algún método visto, probar que para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal $y' + p(x).y = q(x)$ donde particularmente es $q(x) = e^{-\int p(x)dx}$, la solución general está dada por $y = x \cdot q(x) + C \cdot q(x)$

c) Probar que la ecuación diferencial $y'' + (3\alpha)y' + \left(\frac{5}{2}\alpha^2\right)y = 0$ tiene soluciones con funciones trigonométricas para todo $\alpha \neq 0$.

d) Si la función de ley $y = f(x)$ es una solución de la ecuación lineal $y' + p(x).y = q(x)$ con p y q no nulas, ¿también lo es la función de ley $g(x) = f(x) + 3$? Justificar.

e) ¿Cuánto han de valer m y n para que la siguiente ecuación resulte homogénea?

$$y' = \frac{x \cdot y^m}{x^3 \cdot y^2 + \sqrt{x^n} \cdot y^2}$$

A continuación, podés encontrar algunas las soluciones de las actividades de revisión:

Ejercicio 1



Ejercicio 2



Ejercicio 5



Ejercicio 6



- Actividad 1) a) $y = -\frac{3}{x^3+C}$ b) $y = \sqrt[3]{-\frac{3}{4}x^4 + C} - 1$
 c) $y^2 = 2xe^x - 2e^x + C$ d) $y = C \cdot \sqrt[3]{|1+x^3|}$
- Actividad 2) $y = \frac{-3}{x^3+2}$
- Actividad 3) $m = -\frac{1}{2}$ $y = \operatorname{tg}(\sqrt{x} + C)$
- Actividad 5) b) $y = x \cdot \ln [C \cdot |x|]$ $y = x \cdot \ln \left[\frac{1}{e} \cdot |x|\right]$ o $y = -x + x \cdot \ln|x|$
- Actividad 6) a) $y = x \operatorname{sen}[\ln(Cx)]$ b) $y = x \ln[\ln(C|x|)]$
- Actividad 8) b) $y = \frac{3}{x} + \frac{C}{x^2}$ c) $y = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$
- Actividad 9) a) $y = -e^{-x} \cdot \cos(x) + \frac{C}{e^x}$ b) $y = \frac{1}{9}x^5 + Cx^{-4}$ c) $y = 1 + C \cdot e^{-x^2}$
- Actividad 11) b) $y_G = \frac{1}{1+Ce^{\frac{x^2}{2}}}$
- Actividad 12) a) $y = \left(1 + \frac{C}{x}\right)^2$ b) $y^2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{x^4} - \frac{2}{3x}}}$
- Actividad 13) a) Solución general: $y = Cx - C^2$ Solución singular: $y = \frac{x^2}{4}$
 b) Solución general: $y = Cx + \ln(C)$ Solución singular: $y = -1 + \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$
 c) Solución general: $y = C^3 + Cx$ Solución singular: $|y| = \sqrt{\left(-\frac{x}{3}\right)^3} + \sqrt{-\frac{x}{3}}x$
- Actividad 14) No corresponde.
- Actividad 15) d) $y = x - 1 + C \cdot e^{-x}$
- Actividad 16) a) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$ b) $y = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(2x)$
 c) $y = C_1 + C_2 e^x$ d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$
 e) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$ f) $y = e^{2x} \cdot [C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)]$
- Actividad 18) a) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$
 b) $y = C_1 + C_2 \cdot e^{2x} - 3x$

$$c) y = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + x^2 + 2x$$

Actividad 19) $y = -3 + 4e^{-x} + 2x^3 - 3x^2 + 6x$

Actividad 20) a) $y = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot x e^{-3x} + \frac{1}{25} e^{2x}$

b) $y_{GNH}) y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + (-\frac{1}{2}x^2 - x)e^x$

c) $y = e^{3x} - 2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$

Actividad 21) a) $y = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \text{sen}(x) + 2x\cos(x) + \frac{3}{2}x\text{sen}(x)$

b) $y = e^{-x} \cdot [C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \text{sen}(3x)] - \frac{24}{37}\cos(3x) + \frac{4}{37}\text{sen}(3x)$

c) $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \cos(x) - \text{sen}(x)$

Actividad 22) a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\text{sen}(2x)$

b) $y = C_1 + C_2 e^x + 2xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

Actividad 23) a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 \cdot \text{sen}(x) + C_4 \cdot \cos(x)$

b) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{9}x$

Actividad 24) a) Aproximadamente 83048 años

b) ii) $i_p = 5 \cdot (1 - e^{-3t})$

c) $v_p = [-\frac{v_2}{\gamma_1} + (v_0^{1-n} + \frac{v_2}{\gamma_1}) \cdot e^{(1-n)\frac{\gamma_1 t}{m}}]^{\frac{1}{1-n}}$

d) Una hipérbola.

e) i) $x(t) = -\frac{\sqrt{10}}{20}\text{sen}(\sqrt{19,6}t) + 0,2\cos(\sqrt{19,6}t) + \frac{1}{2}$

2. Funciones

1. INTRODUCCIÓN

Ya hemos estudiado anteriormente lo que se conocen como funciones escalares, o funciones reales de variable independiente real. Éstas asignan a un número real, otro número real, como lo es, por ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x) = \ln(x) \in \mathbb{R}$$

En este capítulo, estudiaremos otro tipo de funciones, pero para ello, primero es necesario definir otro conjunto que anteriormente hemos estudiado como espacio vectorial:

Llamamos \mathbb{R}^n al conjunto de todas las n -uplas de números reales, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

Así, por ejemplo \mathbb{R}^3 es el conjunto de absolutamente toda terna de números reales, que incluso puede interpretarse geoméricamente como el conjunto de todos los puntos del espacio ordinario.

2. DEFINICIÓN y ELEMENTOS

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, se llama función de A en \mathbb{R}^m a toda relación que hace que a cada elemento $\vec{r} \in A$ le corresponda un único $\vec{f}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^m$. Su notación es:

$$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \vec{r} \in A \mapsto \vec{f}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^m$$

Como se puede observar en la definición, ahora estudiaremos funciones más generales en las que a un vector (o punto) del espacio \mathbb{R}^n le asignamos un vector (o punto) del espacio \mathbb{R}^m .

Ejemplo:

1) La función cuya ley es $\bar{f}(x; y) = (x + 2y)\bar{i} + [3x \ln(y)]\bar{j} + (2 - x)\bar{k}$ es una función que a ciertos puntos del plano \mathbb{R}^2 le asigna un punto del espacio \mathbb{R}^3 .

Una función de este tipo se caracteriza por los siguientes elementos:

- A es el *dominio* de \bar{f} , formado por todos los \bar{r} para los cuáles tiene sentido la relación funcional como tal.
- Al valor que le corresponde a un \bar{r} por la función, se lo simboliza $\bar{f}(\bar{r})$ y se llama *imagen de \bar{r}* .
- La ecuación $\bar{f} = \bar{f}(\bar{r})$ es la *ley de la función*.
- El *conjunto imagen* o *recorrido* de \bar{f} es el conjunto formado por los elementos de \mathbb{R}^m que son imagen de algún $\bar{r} \in A$.

3. CLASIFICACIÓN

En el apartado anterior hemos definido a una función

$$\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \bar{r} \in A \mapsto \bar{f}(\bar{r}) \in \mathbb{R}^m$$

Dependiendo de los distintos valores que tomen n y m , las funciones pueden clasificarse de la forma en que se muestra en los siguientes párrafos. Es muy importante *familiarizarse con cada tipo de función*.

3.1. FUNCIONES ESCALARES

Como ya hemos estudiado, en el caso en que $n = m = 1$, la notación toma la siguiente forma:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / x \in A \mapsto y = f(x) \in \mathbb{R}$$

A este tipo de funciones se las denomina *funciones escalares*.

La característica más importante de este tipo de funciones es que son aplicaciones que hacen que a un *número real* le corresponda otro *número real*.

En la generalidad, éstas pueden representarse gráficamente en el plano \mathbb{R}^2 , obteniéndose como gráfica una *curva plana*.

Ejemplo:

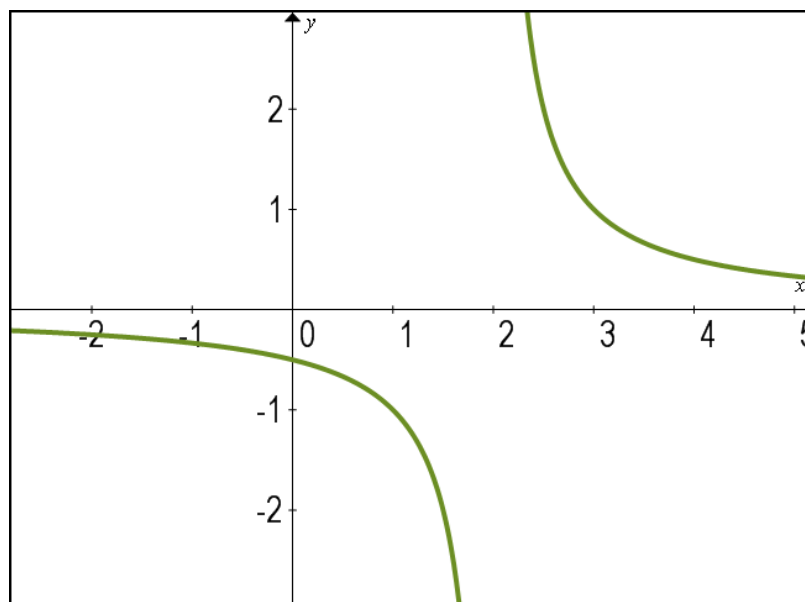
2) La función dada por $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/y = f(x) = \frac{1}{x-2}$ es una función escalar.

Como podemos observar, a un valor real x le hace corresponder su imagen dada por $\frac{1}{x-2}$ que también es un número real. Así, la imagen de $x = 4$ será $f(4) = \frac{1}{2}$, la imagen de $x = -\sqrt{2}$ será $f(-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$, etc.

Como la expresión $\frac{1}{x-2}$ solo tiene sentido matemático si $x \neq 2$ entonces el dominio de definición A de f estará dado por el conjunto $A = \mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Además, como los valores $\frac{1}{x-2}$ recorren todos los reales excepto $y = 0$ ya que siempre $\frac{1}{x-2} \neq 0$, el conjunto imagen de la función es $\mathbb{I}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

La siguiente figura muestra la representación gráfica de f en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, curva que en este caso se denomina *hipérbola*.



Actividad 1. Determinar cuál es el dominio de definición de las funciones escalares cuyas leyes son:

a) $f(x) = \sqrt{-3x + 7}$

b) $f(x) = 2 + \log_2(2x - 7)$

c) $f(x) = \arccos(-3x - 6)$

d) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \dots + \sqrt[20]{x}$

Actividad 2. Realizar la representación gráfica de las funciones cuyas leyes son:

a) $g(x) = 5 - 2x$

b) $f(x) = 2 - e^{-x}$

3.2. FUNCIONES VECTORIALES

Se da en el caso en que $n = 1$ y $m > 1$, y la notación toma la siguiente forma:

$$\bar{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m / t \in A \mapsto \bar{r}(t) \in \mathbb{R}^m$$

A este tipo de funciones se las denomina *funciones vectoriales*.

Como característica principal, destacaremos el hecho de que una función vectorial hace que a un número real $t \in A$ le corresponda un punto (o vector) $\bar{r}(t) \in \mathbb{R}^m$, es decir un vector de m componentes.

Las funciones vectoriales no pueden representarse gráficamente. Sin embargo, solamente para los casos en que $m = 2$ o $m = 3$ podemos graficar el *conjunto imagen* de una función vectorial en el plano o en el espacio, respectivamente.

3.2.1. Casos particulares

Particularmente, si $m = 2$, la función tiene la forma:

$$\bar{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / t \in A \mapsto \bar{r}(t) = (x(t); y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

La imagen $\bar{r}(t)$ puede escribirse:

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\text{ecuaciones paramétricas})$$

Si estas dos funciones x e y son continuas respecto de la variable t , la representación gráfica de este conjunto es una **curva en el plano**.

Ejemplo:

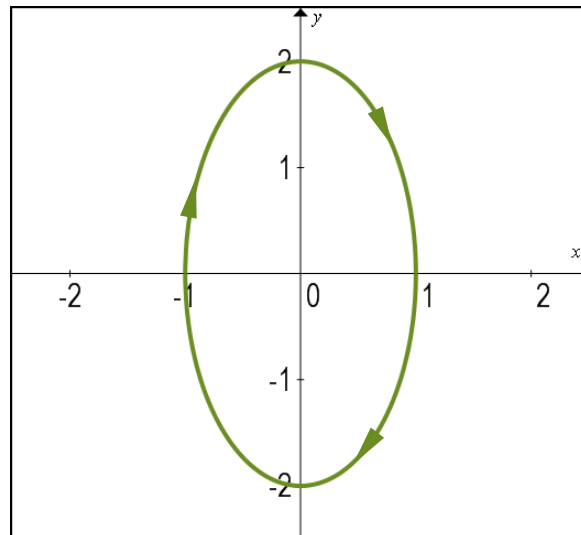
3) La función dada por $\bar{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \bar{r}(t) = [-\cos(t); 2 \cdot \text{sen}(t)]$ con $A = [0; 2\pi]$ es una función vectorial. Como podemos observar en este caso, la función \bar{r} le hace corresponder a un valor real $t \in [0; 2\pi]$ un punto de \mathbb{R}^2 que se obtiene haciendo $[-\cos(t); 2 \cdot \text{sen}(t)]$.

Así, por ejemplo, la imagen de $t = 0$ será $\bar{r}(0) = (-1; 0)$, la imagen de $t = \pi$ será el valor $\bar{r}(\pi) = (1; 0)$, etc.

Las ecuaciones

$$\bar{r}(t) = \begin{cases} x = -\cos t \\ y = 2 \cdot \text{sen} t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

definen una elipse en el plano de centro $(0; 0)$ y semiejes de medidas 1 y 2, como la que se muestra en la figura, y generada con el sentido que se señala:



Para el caso $m = 3$, la función tiene la forma:

$$\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 / t \in A \mapsto \vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

La imagen $\vec{r}(t)$ puede escribirse:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ (ecuaciones paramétricas)}$$

Si estas funciones x , y y z son continuas respecto de la variable t , la representación gráfica de este conjunto es una **curva en el espacio**.

Ejemplo:

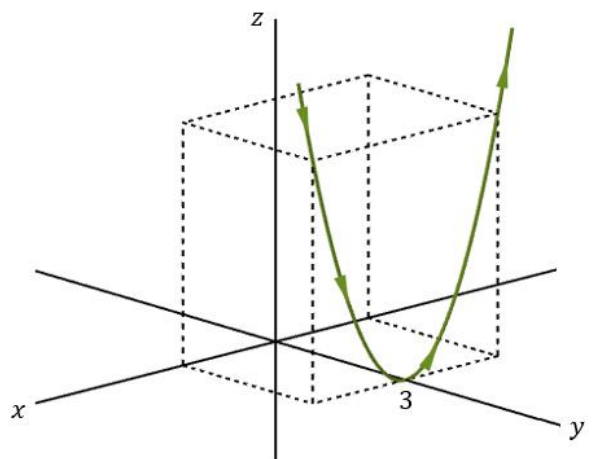
4) La función dada por $\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{r}(t) = (t; 3; t^2)$ con $A = \mathbb{R}$ es una función vectorial.

En este caso, la función \vec{r} le hace corresponder a un valor real $t \in \mathbb{R}$ un punto de \mathbb{R}^3 que se obtiene haciendo $(t; 3; t^2)$.

Las ecuaciones:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = t^2 \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

definen una parábola en el espacio de vértice $(0; 3; 0)$ y eje focal sobre una recta paralela al eje z de las cotas.



Actividad 3. Determinar el dominio de definición de las funciones vectoriales cuyas leyes son:

a) $\vec{r}(t) = (1 + t + t^2)\vec{i} + \sqrt{2 - t}\vec{j}$

b) $\vec{r}(x) = \ln(x)\vec{i} + 2\vec{j} + \arcsen(x)\vec{k}$

c) $\vec{r}(t) = \sqrt{\frac{2t-4}{t-6}}\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}$

Actividad 4. Representar gráficamente el conjunto imagen de las funciones vectoriales cuyas leyes se presentan a continuación, determinando previamente el dominio de definición de las mismas:

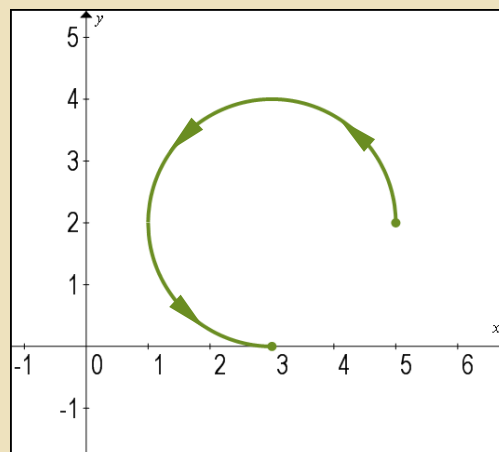
a) $\vec{r}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$

b) $\vec{r}(t) = (\cos t; \sen t; 1)$

c) $\vec{r}(t) = (1 + t; t^2 - 1)$

d) $\vec{r}(t) = (3 \cos t; 3 \sen t; 2t)$

Actividad 5. El siguiente gráfico es el conjunto imagen de una función vectorial de ley $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Plantear una posible ley para la misma y el dominio para el que se define:



3.2.2. Curvas cerradas y arcos de curvas

Llamemos C el conjunto imagen de una función vectorial $\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m = 2$ o $m = 3$ y $\vec{r} = \vec{r}(t)$ una parametrización de la curva C , considerando un dominio particular $[a; b]$.

Si sucede que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ entonces C es una curva *cerrada*.

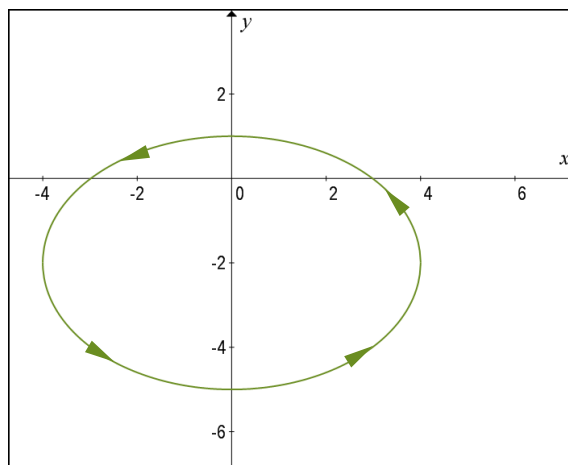
Si en cambio $\vec{r}(a) \neq \vec{r}(b)$ y \vec{r} es inyectiva, entonces C es un *arco de curva*.

Ejemplos:

5) La curva de parametrización

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = 4 \cdot \cos(t) \\ y = -2 + 3 \cdot \sen(t) \end{cases} \text{ con } t \in [0; 2\pi]$$

es una curva cerrada, ya que $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (4; -2)$, como se puede observar en la figura:



6) La curva del espacio de parametrización $\vec{r}(t) = (t^2; t - 2; t)$ con $t \in [1; 4]$ es un arco de curva, ya que $\vec{r}(1) = (1; -1; 1) \neq (16; 2; 4) = \vec{r}(4)$.

Actividad 6. Determinar cuál de las siguientes curvas del plano son cerradas y cuáles son arcos de curva:

a) $\vec{r}(t) = (2 + t)\vec{i} + (t - 3)\vec{j}$ $t \in [-2; 2]$

b) $\vec{r}(t) = (\sin t)\vec{i} + (-\cos t)\vec{j}$ $t \in [0; \pi]$

c) $\vec{r}(t) = (\sin 2t)\vec{i} + (-\cos 2t)\vec{j}$ $t \in [0; \pi]$

3.2.3. Curvas de Jordan y arcos de curva de Jordan

Sea C una curva de parametrización $\vec{r} = \vec{r}(t)$ con $t \in [a; b]$:

Si sucede que la imagen de \vec{r} es una curva cerrada inyectiva en $[a; b[$ entonces C es una *curva de Jordan*.

Si en cambio la imagen de \vec{r} es un arco de curva inyectiva en $[a; b]$ entonces C es un *arco de curva de Jordan*.

Ejemplos:

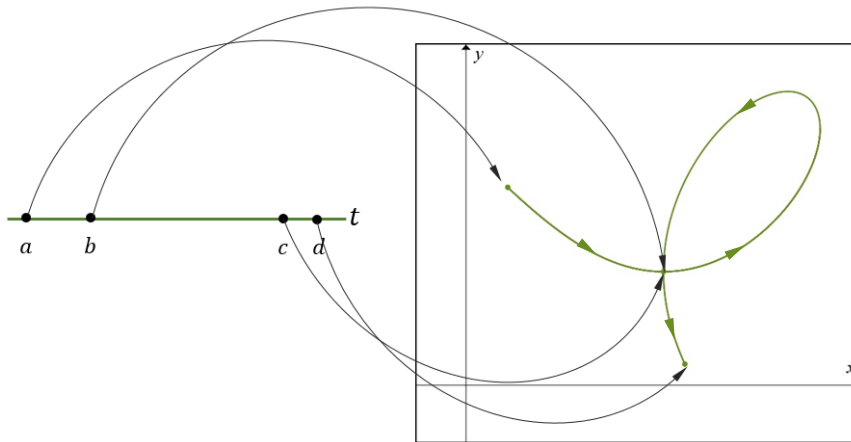
7) La curva de parametrización

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = 4 \cdot \cos(t) \\ y = -2 + 3 \cdot \sin(t) \end{cases} \text{ con } t \in [0; 2\pi]$$

del ejemplo 5 es una curva de Jordan, ya que es cerrada y además se cumple que:

$$\forall t \in [0; 2\pi[: \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

8) La curva de parametrización $\vec{r} = \vec{r}(t)$ que se muestra en la siguiente figura es un arco de curva, pero no es de Jordan debido a que no es inyectiva. Si observamos la figura, $\vec{r}(b) = \vec{r}(c)$.



Actividad 7. De las curvas de la actividad 6, determinar cuáles son de Jordan y cuáles no.

3.3. CAMPOS ESCALARES

Se da en el caso en que $n > 1$ y $m = 1$, y la notación toma la siguiente forma:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \vec{r} \in A \mapsto f(\vec{r}) \in \mathbb{R}$$

A este tipo de funciones se las denomina *campos escalares*.

Como podemos observar un campo escalar es una función que hace que a un punto (o vector) $\vec{r} \in A$ le corresponda un número $f(\vec{r}) \in \mathbb{R}$.

3.3.1. Conjunto gráfica y gráfica de un campo escalar

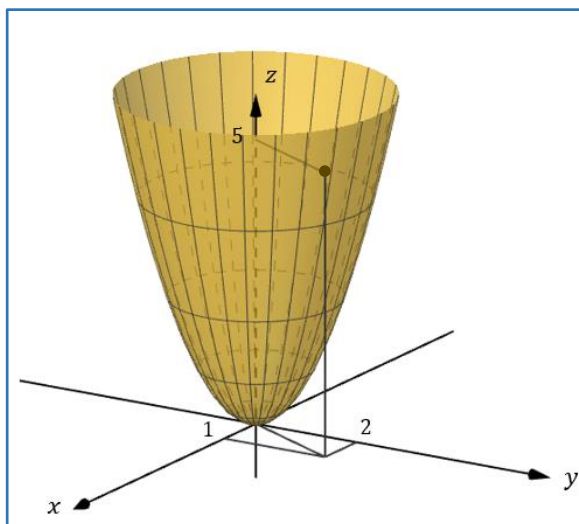
Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con dominio A . La gráfica de f se define como el subconjunto del espacio \mathbb{R}^{n+1} formado por los $(\vec{r}; f(\vec{r}))$ donde $\vec{r} \in A$.

Si bien el conjunto gráfica de un campo escalar está definido para cualquier n , únicamente podemos imaginar y representar aquellos campos escalares con dominio contenido en \mathbb{R}^2 y dicha representación será en \mathbb{R}^3 , obteniendo una *superficie* para el caso más general.

Ejemplo:

8) La función dada por $z: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z(x; y) = x^2 + y^2$ es un campo escalar. A cada par $(x; y) \in A$ le corresponde un real z que se obtiene como la suma de los cuadrados

de las componentes del elemento del dominio. Así, por ejemplo, la imagen de $(1; 2)$ es $z(1; 2) = 1^2 + 2^2 = 5$, etc. Como ya hemos estudiado, la ecuación $z = x^2 + y^2$ representa los puntos de una superficie cuádrica que en particular recibe el nombre de *paraboloide circular*. En la figura se muestra esta superficie, y se indica que la imagen del punto $(1; 2)$ es $f(1; 2) = 5$:



Actividad 8. Determinar el dominio de los campos escalares cuyas leyes se presentan a continuación, y graficar aquéllos (dominios) que sean un subconjunto del plano o del espacio:

a) $f(x; y) = \frac{e^x - 1}{e^x - e^y}$

b) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\ln(2+x)}$

c) $f(x, y) = \ln(x \cdot y)$

d) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y}$

e) $f = \sqrt{4 - (x^2 + y^2 + z^2)}$

f) $f(x; y) = \sqrt{\frac{4 - (x^2 + y^2)}{x^2}}$

g) $f(x; y; z) = \frac{1 - x - y - z}{\ln(y - 3)}$

h) $f(x; y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

i) $f(a; b; c; d) = \frac{\sqrt{a-b}}{c+d-1}$

Actividad 9. Graficar los campos escalares con dominio en \mathbb{R}^2 cuyas leyes se muestran a continuación:

a) $f(x; y) = -x - y + 3$

b) $f(x; y) = y^2 + \frac{x^2}{4}$

c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

d) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

f) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

3.3.2. Conjuntos de nivel

En general, representar gráficamente a una función de dos variables no es una tarea sencilla. Por eso mismo, muchas veces resulta útil analizar cierto tipo de subconjuntos

del dominio de un campo que pueden brindar información sobre el comportamiento del mismo.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con dominio A y $k \in \mathbb{R}$, se denomina *conjunto de nivel de f de valor k* al conjunto

$$\{\bar{r} \in A / f(\bar{r}) = k\}$$

En otras palabras, el conjunto de nivel de f de valor k es el conjunto de los elementos del dominio de f para los cuáles el valor del campo es un valor constante k .

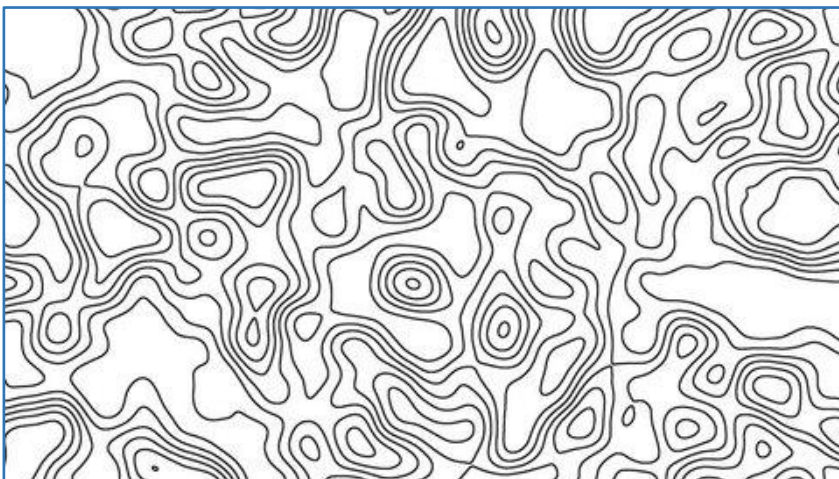
Para el caso particular en que $n = 2$, el conjunto de nivel recibe el nombre: **curvas de nivel**.

Para el caso particular en que $n = 3$, el conjunto de nivel recibe el nombre: **superficies de nivel**.

Curvas de Nivel

Las curvas de nivel de un campo escalar de dos variables x e y son las proyecciones sobre el plano xy de las curvas que se obtienen al intersecar a la superficie de ecuación $z = f(x; y)$ con los planos de ecuación $z = k$, con k constante.

Las curvas de nivel son útiles muchas veces para mostrar mapas de alguna característica de cierta zona terrestre. Si lo que se muestra es el nivel de presión, las curvas de nivel se llaman *isobaras*. Si lo que se muestra es la temperatura, las curvas de nivel se llaman *isotermas*. Cuando las líneas representan una altura sobre el nivel del mar, el esquema recibe el nombre de *mapa topográfico*. La siguiente figura muestra un mapa topográfico de una región determinada.



Ejemplo:

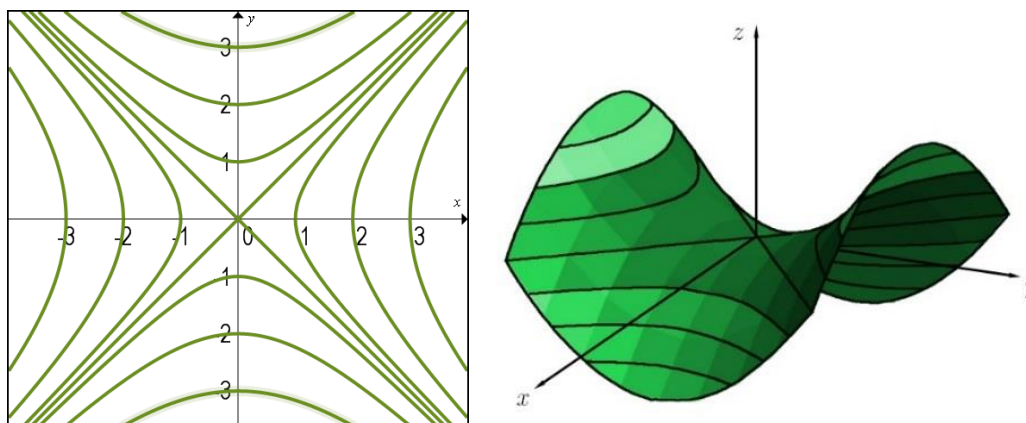
9) Dado el campo escalar $z: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / z(x; y) = y^2 - x^2$, ¿cuáles son sus curvas de nivel?

Se trata de encontrar las curvas $y^2 - x^2 = k$ considerando los posibles valores para k .

Observemos que si:

- $k > 0$, se trata de hipérbolas centradas en $(0; 0)$ con eje focal y .
- $k < 0$, se trata de hipérbolas centradas en $(0; 0)$ con eje focal x .
- $k = 0$, se trata de una hipérbola degenerada, o lo que es lo mismo las dos rectas bisectrices de los cuadrantes.

En la figura se muestran las curvas de nivel en el plano xy para algunos valores de k arbitrarios, y cómo se ven éstas en la gráfica de la superficie $z = y^2 - x^2$:



Superficies de Nivel

Los campos escalares de tres variables no pueden graficarse, como habíamos señalado anteriormente.

Sin embargo, nos podemos hacer una idea de su comportamiento mediante el análisis de las llamadas superficies de nivel.

Dado un campo escalar de ley $u = u(x; y; z)$ sus superficies de nivel son los entes geométricos que se obtienen al hacer $u(x; y; z) = k$, con k constante.

Ejemplo:

10) Dado el campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / f(x; y; z) = x^2 + y^2 - z^2$, ¿cuáles son sus superficies de nivel?

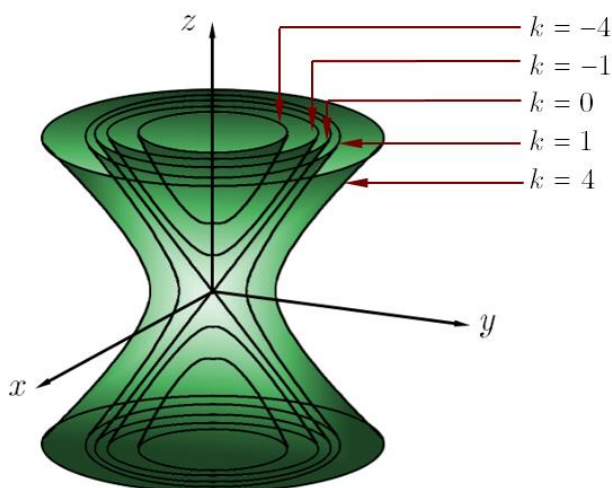
Se trata de encontrar las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = k$ considerando los posibles valores para k .

Observemos que si:

- $k > 0$, se trata de hiperboloides de una hoja centrados en $(0; 0; 0)$ de eje z .

- $k < 0$, se trata de hiperboloides de dos hojas centrados en $(0; 0; 0)$ de eje z .
- $k = 0$, se trata de un hiperboloide degenerado de centro $(0; 0; 0)$ y eje z , es decir las partes superior e inferior de un cono.

En la figura se muestran las superficies de nivel del campo $f(x; y; z) = x^2 + y^2 - z^2$ para algunos valores de k arbitrarios.



Actividad 10. Hallar y graficar algunas curvas de niveles para los campos escalares de dos variables cuyas leyes se muestran a continuación, prestando especial atención al dominio del mismo:

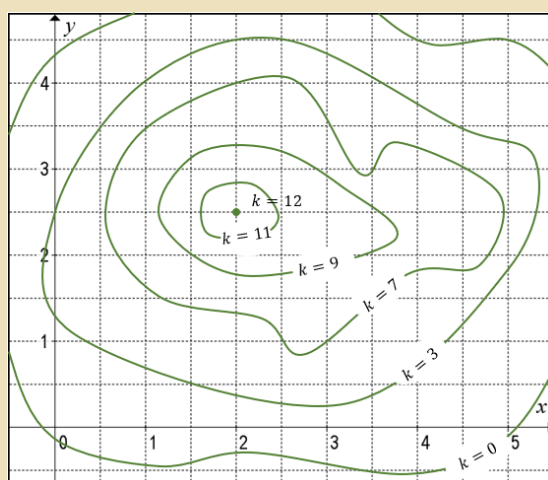
a) $f(x; y) = x^2 - y$

b) $f(x; y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

c) $f(x; y) = x - xy$

d) $f(x; y) = \frac{y-x}{x-3}$

Actividad 11. Se muestran las curvas de nivel de un campo escalar f de dos variables:



Estimar los valores de las siguientes imágenes a partir de la información dada por la gráfica anterior:

a) $f(5; \frac{9}{2})$

b) $f(2; \frac{5}{2})$

c) $f(\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$

d) $f(3; 1)$

e) $f(\frac{3}{2}; 2)$

f) $f(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

Actividad 12. Analizar las superficies de nivel de los campos escalares de tres variables cuyas leyes se presentan a continuación:

- a) $f(x; y; z) = x^2 - y + z^2$ b) $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$
 c) $f(x; y; z) = x + y + 2z$ d) $f(x; y; z) = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)$

3.4. CAMPOS VECTORIALES

Se da en el caso en que $n > 1$ y $m > 1$, y la notación toma la siguiente forma:

$$\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \bar{r} \in A \mapsto \bar{f}(\bar{r}) \in \mathbb{R}^m$$

A este tipo de funciones se las denomina *campos vectoriales*.

Como podemos observar un campo vectorial es una función que hace que a un punto (o vector) $\bar{r} \in A$ le corresponda otro punto (o vector) $\bar{f}(\bar{r}) \in \mathbb{R}^m$.

Los campos vectoriales no pueden representarse gráficamente. Sin embargo, cuando los mismos son de la forma $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, puede realizarse un esquema vectorial en el plano o en el espacio, respectivamente, como se plantea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

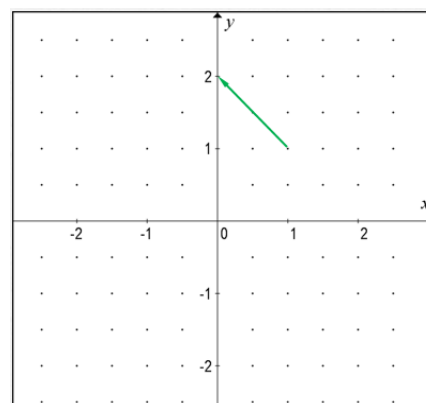
11) Supongamos que se tiene el campo vectorial cuya ley es:

$$\bar{f}(x; y) = (-y; x)$$

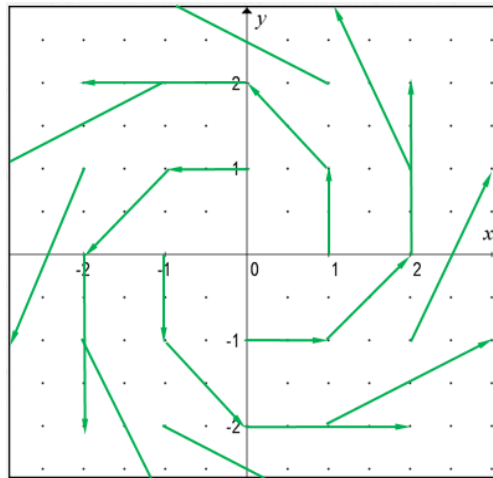
Este campo asigna a cada punto del plano \mathbb{R}^2 otro punto del plano \mathbb{R}^2 bajo la siguiente regla: la primera componente de la imagen es igual al valor opuesto de la segunda componente del elemento del dominio; la segunda componente de la imagen coincide con la segunda componente del elemento del dominio.

Así, por ejemplo $\bar{f}(6; 2) = (-2; 6)$ o también $\bar{f}(2; 0) = (0; 2)$.

Consideremos el punto del plano $\bar{r}_1 = (1; 1)$. Su imagen $\bar{f}(\bar{r}_1)$ será el vector de componentes $(-1; 1)$. A partir del punto del plano $\bar{r}_1 = (1; 1)$ trazamos el vector de componentes $(-1; 1)$. Es decir, graficaremos el vector de componentes $(-1; 1)$ utilizando como origen de este vector al punto de coordenadas $(1; 1)$, como se muestra en la figura:



Si realizamos lo mismo para un número considerable de elementos del dominio, quedará representado el comportamiento del campo vectorial, que para este ejemplo será como lo muestra la figura:



Como ya hemos señalado, los campos vectoriales no pueden representarse gráficamente. Pero particularmente, para el caso en que $n = 2$ y $m = 3$, y bajo algunas condiciones de continuidad e inyectividad, podemos graficar el conjunto imagen del campo vectorial: una *superficie paramétrica*.

Ejemplo:

12) El campo dado por

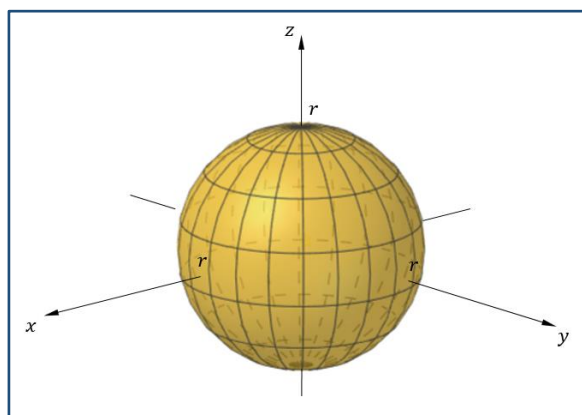
$$\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \bar{f}(u; v) = (r \cdot \cos u \cdot \cos v; r \cdot \operatorname{senu} \cdot \cos v; r \cdot \operatorname{senv})$$

con $A = \{(u; v) / 0 \leq u \leq 2\pi \wedge 0 \leq v \leq \pi\}$ es un campo vectorial.

Notemos que podemos escribir a la imagen del campo como:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos u \cdot \cos v \\ y = r \cdot \operatorname{senu} \cdot \cos v \\ z = r \cdot \operatorname{senv} \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$$

Este conjunto queda representado gráficamente como una superficie esférica de centro en el origen y radio r , como se muestra en la figura:



Actividad 13. Utilizar un graficador para mostrar el mapa de vectores de los siguientes campos vectoriales

a) $\vec{F}(x; y) = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$

b) $\vec{f}(x; y; z) = (x; -y; 0)$

4. OPERACIONES CON FUNCIONES

Ya hemos estudiado las nuevas funciones que pueden obtenerse a partir de dos funciones escalares: suma de funciones, producto de funciones, cociente entre funciones y composición de funciones, y analizamos también cuál es el dominio de esta nueva función resultado. A continuación, enumeramos las posibles operaciones con funciones vectoriales, campos escalares y campos vectoriales.

4.1. OPERACIONES CON FUNCIONES VECTORIALES

Sean las funciones vectoriales

$$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m / t \in A \mapsto \vec{f}(t) \in \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \vec{g}: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m / t \in B \mapsto \vec{g}(t) \in \mathbb{R}^m$$

con conjunto imagen en \mathbb{R}^m , pueden construirse las siguientes funciones:

- $\vec{h}(t) = (\vec{f} \pm \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)$ SUMA O DIFERENCIA

El dominio de la anterior es $\mathbb{D}_{\vec{h}} = A \cap B$

- $h(t) = (\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$ PRODUCTO ESCALAR

En este caso se obtiene una función escalar h cuyo dominio es $\mathbb{D}_h = A \cap B$.

- $\vec{h}(t) = (\vec{f} \wedge \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{g}(t)$ PRODUCTO VECTORIAL

Esta vez se obtiene como resultado una nueva función vectorial $\vec{h} = \vec{h}(t)$ cuyo dominio es $\mathbb{D}_{\vec{h}} = A \cap B$. Es importante destacar que sólo es posible realizarlo para el caso en que $m = 3$.

4.2. OPERACIONES CON CAMPOS ESCALARES

Sean

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \vec{r} \in A \mapsto f(\vec{r}) \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g: B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \vec{r} \in B \mapsto g(\vec{r}) \in \mathbb{R}$$

dos campos escalares con dominio en \mathbb{R}^n , entonces pueden construirse los siguientes campos escalares:

- $h(\vec{r}) = (f \pm g)(\vec{r}) = f(\vec{r}) \pm g(\vec{r})$ SUMA O DIFERENCIA
- $h(\vec{r}) = (f \cdot g)(\vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot g(\vec{r})$ PRODUCTO

En estos casos se obtiene como resultado otro campo escalar $h = h(\vec{r})$ cuyo dominio es $\mathbb{D}_h = A \cap B$.

- $h(\vec{r}) = \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{r}) = \frac{f(\vec{r})}{g(\vec{r})}$ COCIENTE

El resultado que se obtiene al realizar esta operación, también resulta ser un campo escalar cuyo dominio es $\mathbb{D}_h = (A \cap B) - \{\vec{r} \in (A \cap B) / g(\vec{r}) = 0\}$.

4.3. OPERACIONES CON CAMPOS VECTORIALES

Sean

$$\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \vec{r} \in A \mapsto \vec{f}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \vec{g}: B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \vec{r} \in B \mapsto \vec{g}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^m$$

dos campos vectoriales con dominio en \mathbb{R}^n e imagen en \mathbb{R}^m , entonces pueden construirse las siguientes funciones:

- $\vec{h}(\vec{r}) = (\vec{f} \pm \vec{g})(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \pm \vec{g}(\vec{r})$ SUMA O DIFERENCIA

En estos casos se obtiene como resultado otro campo vectorial $\vec{h} = \vec{h}(\vec{r})$ cuyo dominio es $\mathbb{D}_{\vec{h}} = A \cap B$.

- $h(\vec{r}) = (\vec{f} \cdot \vec{g})(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{g}(\vec{r})$ PRODUCTO ESCALAR

En este caso se obtiene como resultado un campo escalar $h = h(\vec{r})$ cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{D}_h = A \cap B$.

- $\vec{h}(\vec{r}) = (\vec{f} \wedge \vec{g})(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \wedge \vec{g}(\vec{r})$ PRODUCTO VECTORIAL

Esta vez se obtiene como resultado un nuevo campo vectorial $\vec{h} = \vec{h}(\vec{r})$ cuyo dominio es $\mathbb{D}_{\vec{h}} = A \cap B$. Es importante destacar que sólo es posible realizarlo para el caso en que $m = 3$.

4.4. PRODUCTO DE UN CAMPO ESCALAR CON UN CAMPO VECTORIAL

Sean

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \vec{r} \in A \mapsto f(\vec{r}) \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \vec{g}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \vec{r} \in A \mapsto \vec{g}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^m$$

un campo escalar y un campo vectorial, respectivamente, ambos con el mismo dominio A contenido en \mathbb{R}^n , entonces es posible realizar entre ellos la siguiente operación que da lugar a un nuevo campo vectorial:

- $\bar{h}(\bar{r}) = (f \cdot \bar{g})(\bar{r}) = f(\bar{r}) \cdot \bar{g}(\bar{r})$ PRODUCTO

Nuevamente, el dominio del nuevo campo vectorial es la intersección de los conjuntos A y B .

4.5. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Como ya hemos aprendido anteriormente, la composición entre dos funciones será posible en la medida en que el conjunto imagen de la primera función que se aplica esté contenido en el dominio de la segunda.

Existen varias alternativas para poder componer dos funciones de varias variables: composición entre una función vectorial y un campo escalar (que genera una función escalar), composición entre dos campos vectoriales (que genera un nuevo campo vectorial), etc.

Ejemplo:

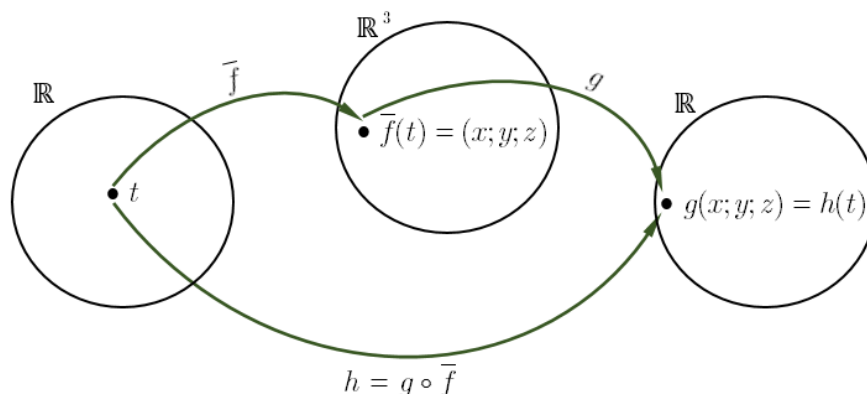
13) Supongamos que se tienen la función vectorial y el campo escalar siguientes:

$$\bar{f}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 / t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \bar{f}(t) = (t; t^2; \ln(t)) \in \mathbb{R}^3 \text{ y}$$

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} / (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto g(x; y; z) = x^2 + y + z \in \mathbb{R}$$

El conjunto imagen de \bar{f} está contenido en \mathbb{R}^3 , con lo cual puede obtenerse una nueva función h (composición) haciendo: $h(t) = (g \circ \bar{f})(t) = g[\bar{f}(t)]$.

Su ley será $h(t) = 2t^2 + \ln(t)$ con dominio $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}^+$.



Actividad 14. La temperatura en grados celsius de una placa bidimensional (esto significa que su grosor es despreciable) viene dado por

$$T_C(x; y) = 2x^2 + 3y^2 + 15.$$

Por otro lado, para convertir una temperatura medida en grados celsius en su equivalente en grados Farenheit, puede utilizarse la fórmula:

$$T_F(T_C) = 32 + \frac{9}{5} \cdot T_C$$

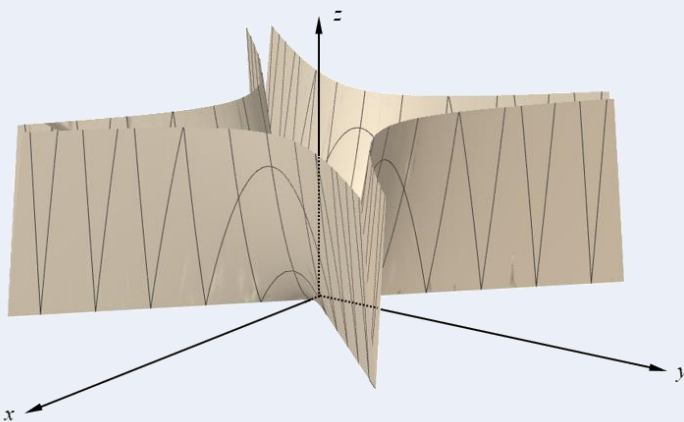
Construir como composición de dos funciones, una función que devuelva directamente la temperatura en grados Farenheit colocadas las coordenadas del punto de la placa.

Actividad 15. Realizar el producto escalar y el producto vectorial entre los siguientes campos vectoriales:

$$\vec{g}(x; y) = (2x + y; x; y) \quad \text{y} \quad \vec{h}(x; y) = (1; -xy; 0)$$

REVISIÓN FINAL DE LA UNIDAD

1) En la figura, se muestra la gráfica de la función cuya ley es $f(x; y) = |x^2 - y^2|$:



- ¿Qué tipo de función es?
- ¿Cuánto vale $f(2; 6)$?
- ¿Cuál es el conjunto imagen?
- Estudiar las curvas de nivel para:
 - $k = 0$
 - $k = -1$
 - $k = 2$

2) Para cada una de las siguientes leyes, indicar:

- el tipo de función que representa.
- en qué espacios \mathbb{R}^p están incluido su dominio de definición y su conjunto imagen.
- si la función puede representarse gráficamente, en qué espacio y qué ente geométrico se obtiene.
- si solo su conjunto imagen puede representarse gráficamente, en qué espacio y qué ente geométrico se obtiene.

$$a(x) = \ln(x - 3)$$

$$\vec{b}(t) = (t + 4; t^2 - 3)$$

$$\vec{c}(x; y) = (x + y; x - y; 2x + 3y)$$

$$d(x; y; z) = xy + z$$

$$e(x; y) = x - y$$

$$f(x) = 3^x$$

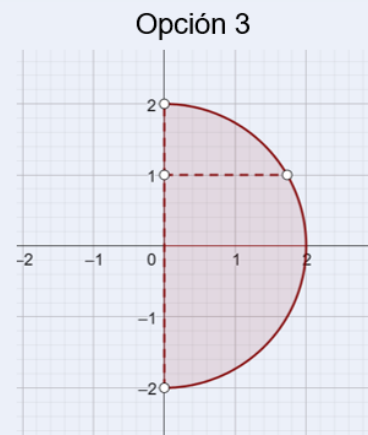
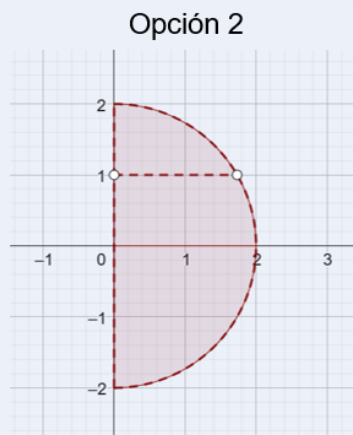
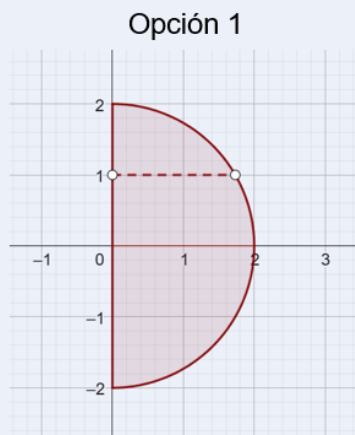
$$\vec{g}(\alpha) = 4 \cos(\alpha)\vec{i} + 4 \sin(\alpha)\vec{j} + 3\alpha\vec{k}$$

$$h(x; y) = \ln(xy)$$

$$\vec{i}(a; b) = (a; a + b)$$

3) Dada el campo escalar cuya ley es $f(x; y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x) + \frac{1}{\ln(y^2)}$, se pide:

Explicar cuál de los siguientes conjuntos es la representación de su dominio de definición, explicando la respuesta:



Opción 4: Ninguna de las anteriores.

4) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas.

a) La curva de nivel del CE de ley $f(x; y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4$ correspondiente al nivel $k = 5$ es una circunferencia de radio de longitud 9 y centro en $C(-2; -3)$.

b) La gráfica de la función vectorial de ley $\vec{r}(t) = (2 + t; 1 - t)$ es una recta en el espacio.

c) La función de ley $\vec{f}(x; y) = (x + y; 2x - y^2)$ corresponde a la de un campo escalar.

d) La función escalar de ley $f(x) = \sqrt{x - 2}$ tiene el mismo dominio que la función vectorial de ley $\vec{r}(x) = (\ln(x - 2); 2x + 5)$.

5) Graficar el conjunto imagen de la función cuya ley es $\vec{r}(t) = (2 - t^2; t - 1)$ considerando $-2 \leq t \leq 3$. Clasificar la curva en curva cerrada o arco de curva, y decidir si es de Jordan.

6) Dada una función de la forma $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m / t \in A \mapsto \vec{f}(t) \in \mathbb{R}^m$, se pide:

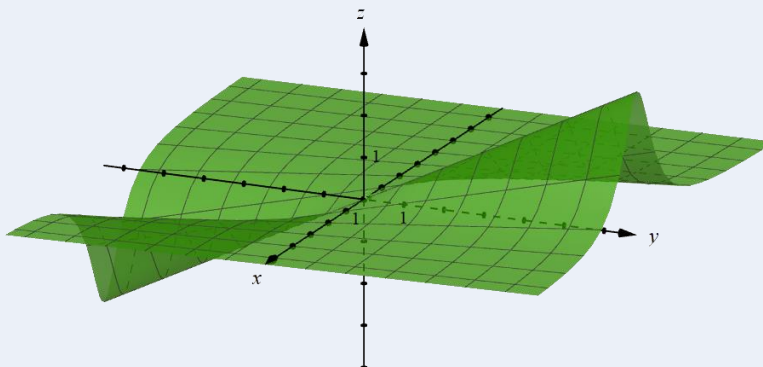
a) Indicar qué nombre recibe este tipo de función.

b) Suponer $m = 2$. Indicar si este tipo de función se puede graficar. En caso de que no se pueda graficar explicar qué es lo que se grafica en este tipo de funciones.

c) Este tipo de funciones hace corresponder a un elemento del conjunto \mathbb{R} otro elemento del conjunto \mathbb{R}^m . ¿Cómo se llama al tipo de funciones en el que la correspondencia se da en sentido opuesto?

7) La altura en metros de un terreno varía según la posición $(x; y)$ en la que una hormiga se pose según la ley:

$$f(x; y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{1+x^2}$$



Supongamos que una hormiga se encuentra en el origen de coordenadas.

a) Justificar por qué la hormiga puede desplazarse libremente hacia cualquier punto, sin caer en ningún agujero en el terreno.

b) Si la hormiga debe comenzar a moverse con la condición de no modificar la altura en la que se encuentra, mostrar que esto únicamente es posible haciéndolo en trayectoria recta y decir de qué trayectoria se trata.

c) ¿Con qué conceptos trabajados en el capítulo se relacionan los incisos a y b?

d) En cierto momento, la hormiga comienza a moverse de tal manera que se encuentra a la altura del punto $(0; 2)$ del plano xy .

i) ¿a qué altura se encuentra?

ii) si quiere moverse siempre manteniéndose a esa altura, ¿por qué curva lo debe hacer?

iii) proponer la ley de una función vectorial cuya imagen sea la trayectoria del inciso ii.

A continuación, podés encontrar las soluciones de algunas de las actividades de revisión:

Ejercicio 1



Ejercicio 2



Ejercicio 3



(Sólo hasta 4.48)

- b) Un paraboloides elíptico de eje de simetría z
- c) La semiesfera de centro en el origen y radio 2 por encima del plano xy
- d) La semiesfera de centro en el origen y radio 2 por debajo del plano xy
- e) La hoja superior de un cono circular de eje de simetría z
- f) La hoja superior de un hiperboloides de dos hojas con eje de simetría z

- Actividad 10)
- a) Son parábolas corrimientos verticales de la parábola matriz, para todo $k \neq 0$.
 - b) Son circunferencias de radio $\sqrt[4]{k}$ si $k > 0$. Si $k = 0$, es el origen.
 - c) Para todo $k \neq 0$ se tratan de hipérbolas. Si $k = 0$ son dos rectas perpendiculares.
 - d) Es el haz de rectas que pasa por el punto $(3; 3)$, excepto la recta vertical.

- Actividad 11) a) 0 b) 12 c) 3 d) 7 e) 9 f) ≈ 5

- Actividad 12)
- a) Paraboloides circulares con su copa abriendo hacia el sentido positivo del eje y
 - b) Son superficies esféricas de radio \sqrt{k} si $k > 0$. Si $k = 0$, es el origen.
 - c) Planos para todo valor de k .
 - d) Son superficies esféricas de radio $\sqrt{e^k - 1}$ si $k > 0$. Si $k = 0$, es el origen.

Actividad 14) $T_F[T_C(x; y)] = 32 + \frac{9}{5} \cdot (2x^2 + 3y^2 + 15) = \frac{18}{5}x^2 + \frac{27}{5}y^2 + 59$

- Actividad 15)
- a) $f(x; y) = 2x + y - yx^2$
 - b) $\bar{F}(x; y) = (xy^2; y; -2x^2y - xy^2 - x)$

3. Límites y Continuidad

1. INTRODUCCIÓN

Ya hemos visto que si se tiene una función escalar $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, calcular el límite de f cuando la variable independiente x tiende a un punto x_0 (punto de acumulación del conjunto A) significa determinar a qué valores se *van acercando* las imágenes de los x alrededor de x_0 , cuando éstos se toman cada vez más próximos a él. Esto se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Como la variable independiente se puede mover en *una sola trayectoria* (la del eje x), cuando hablamos del acercamiento, a lo sumo hemos hecho la diferencia *del sentido* del mismo, por izquierda o por derecha, y lo hemos expresado:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{límite lateral izquierdo}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{límite lateral derecho}$$

Esto se da así pues el dominio de la función es un conjunto contenido en \mathbb{R} . También las funciones vectoriales tienen dominio contenido en los reales, por lo que el límite se definirá de manera similar. Pero para el caso de los campos (escalares o vectoriales) sucede algo distinto.

Si, por ejemplo, tenemos un campo escalar de dos variables, podremos acercarnos a un punto $(x_0; y_0)$ por infinitos caminos, ya no solamente por dos.

En estos textos vamos a analizar qué sucede con los límites para los otros tipos de funciones vistas, previamente definiendo el concepto de punto de acumulación en el conjunto \mathbb{R}^n .

2. ENTORNO, ENTORNO REDUCIDO y PUNTO DE ACUMULACIÓN

Antes de recordar la definición de límite de una función escalar, y estudiar la definición de los límites para los otros tipos de funciones, definiremos entorno y entorno reducido en el conjunto \mathbb{R} y en general en un espacio \mathbb{R}^n .

2.1. ENTORNO y ENTORNO REDUCIDO

Sea $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ y un real $\delta > 0$, definimos como entorno de centro \bar{r}_0 y radio δ al conjunto

$$E[\bar{r}_0; \delta] = \{\bar{r} \in \mathbb{R}^n / |\bar{r} - \bar{r}_0| < \delta\}$$

donde $|\bar{r} - \bar{r}_0|$ representa el módulo del vector $\bar{r} - \bar{r}_0$.

Esto significa que dado el punto $\bar{r}_0 = (c_1; c_2; \dots; c_n)$ y el número positivo δ , el entorno $E[\bar{r}_0; \delta]$ es el conjunto de todos los $\bar{r} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ que verifican que:

$$\sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2} < \delta$$

Ejemplo:

1) En \mathbb{R}^2 el entorno de centro $(2; 1)$ y radio 3 es el conjunto de todos los puntos $(x; y)$ del plano, tales que:

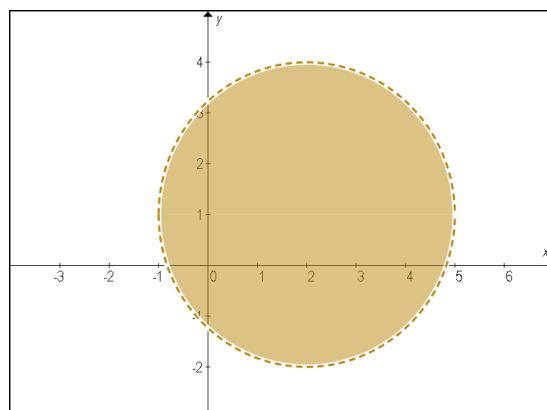
$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} < 3$$

O también: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 < 9$

Es decir,

$$E[(2; 1); 3] = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 2)^2 + (y - 1)^2 < 9\}$$

que se interpreta geoméricamente como los puntos del interior de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$:



Actividad 1. Obtener las expresiones simbólicas de los entornos de centro $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\delta > 0$; e interpretar geoméricamente si:

- a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$

Sea $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ y un real $\delta > 0$, definimos como entorno reducido de centro \bar{r}_0 y radio δ al conjunto

$$E'[\bar{r}_0; \delta] = \{\bar{r} \in \mathbb{R}^n / 0 < |\bar{r} - \bar{r}_0| < \delta\}$$

donde $|\bar{r} - \bar{r}_0|$ representa el módulo del vector $\bar{r} - \bar{r}_0$.

Esto significa que dado el punto $\bar{r}_0 = (c_1; c_2; \dots; c_n)$ y el número δ , el entorno reducido $E'[\bar{r}_0; \delta]$ es el conjunto de todos los $\bar{r} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ que verifican que:

$$0 < \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2} < \delta$$

Ejemplo:

2) En \mathbb{R} , el entorno reducido de centro 4 y radio 6 es el conjunto de todos los puntos x de la recta real, tales que:

$$0 < \sqrt{(x - 4)^2} < 6$$

O también: $0 < |x - 4| < 6$

Es decir,

$$E'(4; 6) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < |x - 4| < 6\} = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 10 \wedge x \neq 4\} =]-2; 4[\cup]4; 10[$$

Actividad 2. Obtener las expresiones simbólicas de los entornos reducidos de centro $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\delta > 0$; e interpretar geoméricamente si:

- a) $n = 1$ b) $n = 2$ c) $n = 3$

2.2. PUNTO DE ACUMULACIÓN DE UN CONJUNTO

Sea $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que \bar{r}_0 es punto de acumulación del conjunto A si y solo si:

$$\forall \delta > 0: \exists E'[\bar{r}_0; \delta] \cap A \neq \emptyset$$

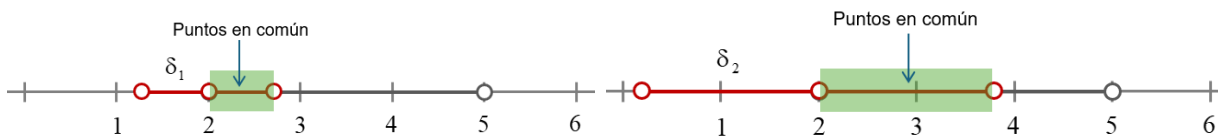
Lo anterior significa que \bar{r}_0 será punto de acumulación de A si para cualquier entorno reducido con centro en \bar{r}_0 ($\forall \delta > 0$) sucede que la intersección entre dicho entorno y el conjunto A es diferente al conjunto vacío; es decir necesariamente deben tener siempre puntos en común (sin contar al centro del entorno, pues es reducido).

Ejemplos:

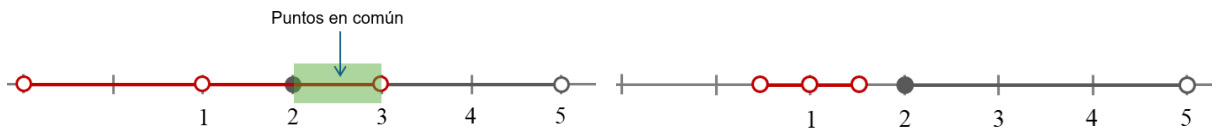
3) Sea el conjunto $A = [2; 5[$ que se muestra en la figura:



Por ejemplo, $x = 2$ es punto de acumulación de A . En efecto, cualquier entorno reducido de centro 2 y radio δ tiene puntos en común con el conjunto A , como se muestra en las siguientes figuras:

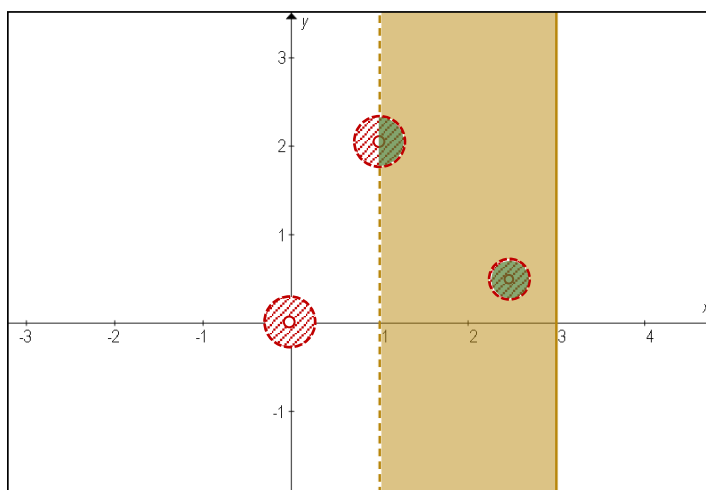


En cambio, $x = 1$ no es punto de acumulación de A porque si bien existe algún entorno reducido alrededor de 1 con puntos en común con A (por ejemplo, si $\delta = 2$), esto no ocurre para todo entorno (por ejemplo, si $\delta = \frac{1}{2}$):



Cualquier $2 < x < 5$ también es punto de acumulación de A . ¿y qué sucede con $x = 5$?

4) Sea el conjunto $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x \leq 3\}$, cuya gráfica se muestra:



El origen de coordenadas no es punto de acumulación de A ni cualquier punto sobre el eje y . En cambio, cualquier punto sobre la recta $x = 1$ es efectivamente punto de acumulación del conjunto A , etc.

7) El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ existe y vale 1 a pesar de que la función no esté definida en $x = 0$ (seno cardinal).

8) El límite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x^2-3x+2}$ existe y vale 3 aplicando los procedimientos necesarios para salvar la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Actividad 4. Calcular analíticamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-18}{x^2-5x+6}$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen}(x-\pi)}{3x-3\pi}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\text{sen}(x-2)}{2x-4} + \frac{x^2-4}{2-x} \right]$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{tg}(x-1)}{x-1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-2^{0,5}}{x-2}$

3.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Sea una función vectorial $\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y t_0 un punto de acumulación de A , diremos que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta = \delta(\varepsilon) / \forall t \in [E'(t_0; \delta) \cap A] \Rightarrow \vec{r}(t) \in E(\vec{L}; \varepsilon)$$

Como el dominio de una función vectorial es un subconjunto de los reales, al igual que con las funciones escalares, al acercarnos al valor t_0 solamente lo podemos hacer por *una única trayectoria* (en todo caso quizás, por dos sentidos diferentes). Con lo cual, no habrá diferencias grandes con los cálculos de los límites vistos hasta el momento. Sin embargo, como el límite tiene la forma de los elementos del conjunto de llegada de la función, al ser una función vectorial, éstos no serán números reales sino vectores (puntos).

3.2.1. Relación entre el límite de una función vectorial y los de sus componentes

Supongamos que se quiere calcular el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (r_1(t); r_2(t); \dots; r_m(t))$$

Las funciones componentes de la función vectorial $\vec{r}(t)$ son funciones escalares:

$$r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)$$

Para que exista el límite $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$ basta con que existan los límites:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r_1(t) = L_1, \lim_{t \rightarrow t_0} r_2(t) = L_2, \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} r_m(t) = L_m$$

y vale $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = (L_1; L_2; \dots; L_m)$.

Ejemplos:

9) Se quiere calcular el límite $\lim_{t \rightarrow 2} [(2t + 1)\bar{i} + \frac{\text{sen}(t-2)}{2t-4}\bar{j} + \frac{t^2-4}{2-t}\bar{k}]$.

Para asegurar que este límite existe, basta asegurar que existen los siguientes límites de funciones escalares:

$$\lim_{t \rightarrow 2} (2t + 1), \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\text{sen}(t-2)}{2t-4} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2-4}{2-t}$$

Verifique que existen y valen 5 , $\frac{1}{2}$ y -4 , respectivamente.

Luego, $\lim_{t \rightarrow 2} [(2t + 1)\bar{i} + \frac{\text{sen}(t-2)}{2t-4}\bar{j} + \frac{t^2-4}{2-t}\bar{k}] = (5; \frac{1}{2}; -4)$

10) El límite $\lim_{t \rightarrow 0} (2 + t; \frac{1}{t})$ no existe pues no existe $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}$

Actividad 5. Calcular analíticamente los siguientes límites:

a) $\lim_{t \rightarrow -3} (\frac{5}{t+3}\bar{i} + e^{-\frac{1}{t}}\bar{j} + \ln(t+4)\bar{k})$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{\text{sen}(2t)}{t}; t + 1; \frac{t^2-t}{t})$

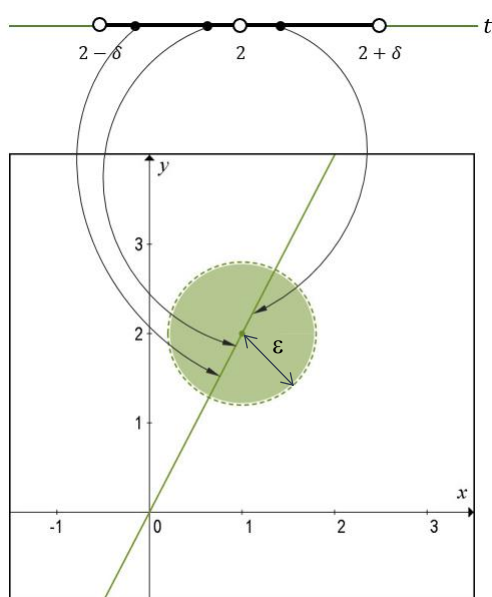
c) $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{f}(t)$ si $\bar{f}(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(t)}{t}\bar{i} + (t-2)\bar{j} + \frac{1}{t+1}\bar{k} & t \neq 0 \\ (1; -2; 1) & t = 0 \end{cases}$

3.2.2. Interpretación geométrica

La misma puede hacerse para el caso en que el conjunto imagen pueda graficarse, es decir, $m = 2$ (curva en el plano) o $m = 3$ (curva en el espacio). Analicemos cómo se interpreta geoméricamente el límite mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

11) El límite $\lim_{t \rightarrow 2} [(t-1)\bar{i} + (2t-2)\bar{j}]$ vale $\bar{L} = (1; 2)$.



Notemos que decir que el límite es $\bar{L} = (1; 2)$ es equivalente a decir que, establecido cualquier entorno de centro $\bar{L} = (1; 2)$ y radio ε en el conjunto de llegada, éste determina un radio δ con el cual formar un entorno reducido sobre el eje t de centro $t_0 = 2$ y radio δ . La cuestión es que tomando cualquier t en el dominio de la función y en este último entorno, sus imágenes estarán en el entorno centro $\bar{L} = (1; 2)$ y radio ε . Y esto sucederá sin importar el ε elegido.

La interpretación geométrica para una función vectorial cuyo conjunto imagen esté contenido en \mathbb{R}^3 es análoga, pero considerando una curva en el espacio, y un entorno que tendrá forma de los puntos interiores de una superficie esférica.

3.2.3. Álgebra de límites de funciones vectoriales

Sabiendo que $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{f}(t) = \bar{F}$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{g}(t) = \bar{G}$, y que ambas funciones tienen su conjunto imagen incluido en \mathbb{R}^m entonces:

- $\lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{f}(t) + \bar{g}(t)] = \bar{F} + \bar{G}$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} [k \cdot \bar{f}(t)] = k \cdot \bar{F}$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{f}(t) \cdot \bar{g}(t)] = \bar{F} \cdot \bar{G}$
- $\lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{f}(t) \wedge \bar{g}(t)] = \bar{F} \wedge \bar{G}$ solamente para el caso en que $m = 3$.

3.3. LÍMITE DE UN CAMPO ESCALAR

Sea un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y \bar{r}_0 un punto de acumulación de A , diremos que:

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} f(\bar{r}) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta = \delta(\varepsilon) / \forall \bar{r} \in [E'(\bar{r}_0; \delta) \cap A] \Rightarrow f(\bar{r}) \in E(L; \varepsilon)$$

A diferencia de los dos tipos de funciones anteriores, al estar el dominio contenido en el espacio \mathbb{R}^n (y no en \mathbb{R}) las vías para acercarse a \bar{r}_0 serán infinitas, y en particular estudiaremos aquellos campos cuyo dominio esté en \mathbb{R}^2 . Este tipo de límite se llama *límite doble*.

3.3.1. Límite doble

Adaptaremos la definición anterior al caso particular en que los campos escalares tengan su dominio contenido en el plano, debido principalmente a la ventaja de poder interpretarlo de manera geométrica.

Sea un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0; y_0)$ un punto de acumulación de A , diremos que:

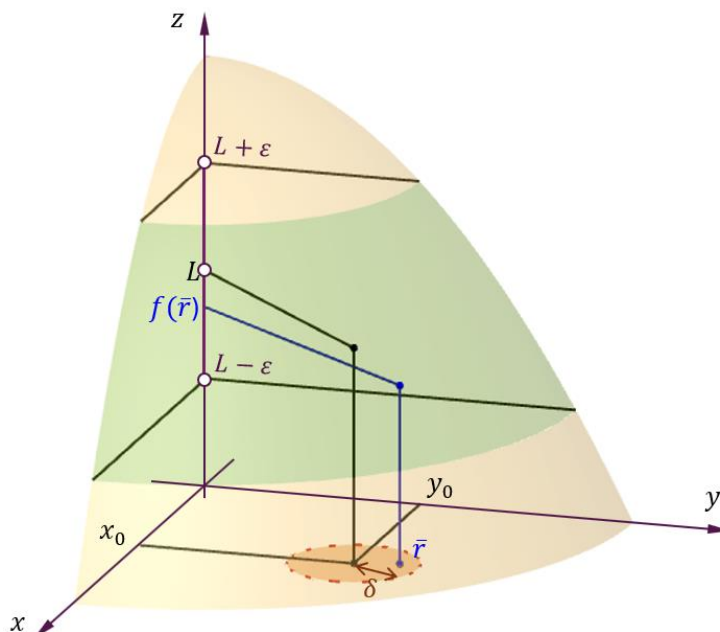
$$\lim_{(x;y) \rightarrow (x_0;y_0)} f(x; y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta = \delta(\varepsilon) /$$

$$\forall (x; y) \in A \wedge 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x; y) - L| < \varepsilon$$

Interpretación geométrica

Lo anterior, puede entenderse de la siguiente manera: Elegido un real positivo ε , formamos un entorno de centro L y radio ε , contenido en los reales (eje z). Este valor ε , define un entorno reducido de centro $(x_0; y_0)$ y radio δ contenido ahora en el dominio de la función (sobre el plano xy)

Recomendación:
visualizar hasta
el minuto 16.05



Asegurar que existe el límite propuesto es equivalente a asegurar que si se toma un $\bar{r} = (x; y)$ cualquiera entorno del plano xy (pero que además esté en el dominio) sus imágenes *caerán* en el entorno que está sobre el eje z , y lo interesante es que esto ocurrirá siempre, independientemente del valor de ε que se elija, es decir, por más pequeño que el mismo pueda ser. Es importante señalar además cómo δ depende del valor arbitrario ε elegido para construir el entorno del plano.

No existencia del límite doble

Si los $f(x; y)$ tienden a L_1 cuando $(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)$ a lo largo de una trayectoria T_1 y los $f(x; y)$ tienden a L_2 cuando $(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)$ a lo largo de una trayectoria T_2 , y además $L_1 \neq L_2$, entonces:

$$\text{no existe el límite } \lim_{(x;y) \rightarrow (x_0;y_0)} f(x; y)$$

Ejemplo:

12) El límite $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

Supongamos acercarnos al punto $(0; 0)$ por la dirección del eje x , es decir por la recta del plano de ecuación $y = 0$. El campo escalar $f(x; y) = \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ asume la forma $f(x; 0) = \frac{2x^2}{x^2} = 2$, si $x \neq 0$.

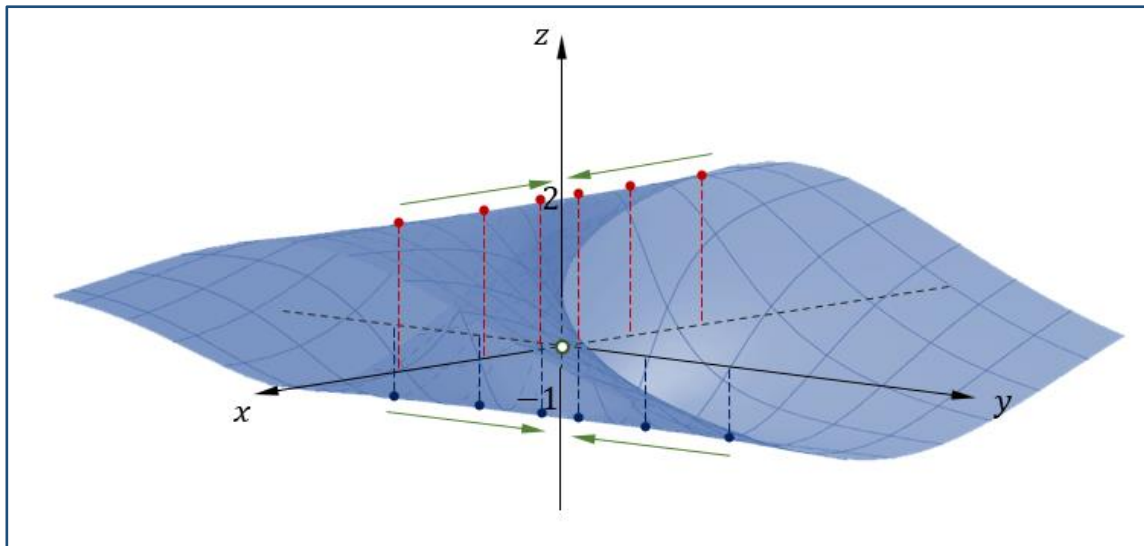
Con lo cual $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} f(x; y)$ debería ser $L_{y=0} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$, si nos acercamos por la dirección de x .

Si ahora en cambio, lo hacemos por la dirección del eje y , obtendremos:

$f(0; y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$ si $y \neq 0$. Luego, $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} f(x; y)$ debería ser $L_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$.

Como acercándonos por dos trayectorias distintas obtenemos valores distintos del límite, por la propiedad anterior concluimos que $\nexists \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Gráficamente, puede observarse esta situación:



Procedimiento para el cálculo analítico de un límite doble

Ejemplo:

13) Supongamos que tenemos el campo escalar de ley $f(x; y) = \frac{x^4 \cdot (y-1)}{2(y-1)^3 + x^6}$ y queremos calcular el límite del campo cuando $(x; y) \rightarrow (0; 1)$.

Recomendación:
visualizar desde
el minuto 16.05



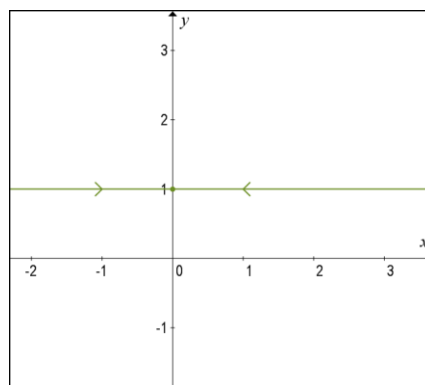
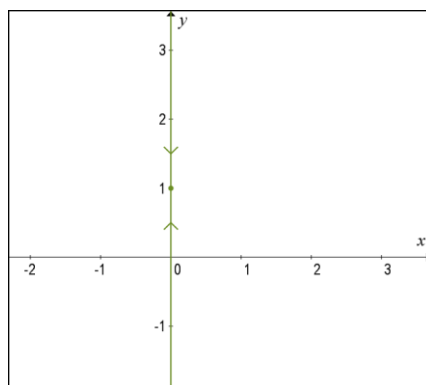
- En primer lugar, siempre probaremos si al reemplazar directamente por el punto al cuál se tiende, se obtiene algún resultado que nos sirva.

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;1)} \frac{x^4 \cdot (y-1)}{2(y-1)^3 + x^6} = \frac{0}{0} \text{ No nos sirve (indeterminación)}$$

- Luego, nos fijamos si podemos resolver el límite aplicando alguna estrategia matemática: llevándolo a algún límite conocido, salvando la indeterminación, etc.

En este caso, no podemos hacerlo.

- Comenzaremos calculando los límites por distintas trayectorias. Recordemos que *todas* estas trayectorias deben pasar por el punto al cuál tiende $(x; y)$. En primer lugar, comenzamos con las más sencillas que corresponden a rectas paralelas a los ejes coordenados que pasan por el punto. En este caso serán: $x = 0$ e $y = 1$.



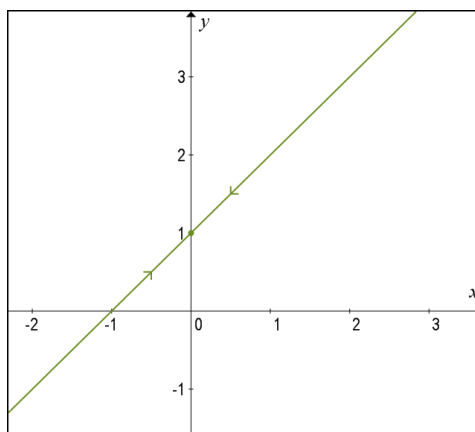
Si los límites obtenidos, son distintos, entonces podemos decir que el límite que estamos buscando no existe y se concluye la búsqueda. El problema surge si los límites *no* son distintos; o si uno existe y el otro no. En tal caso, debemos continuar con el análisis.

$$\text{Camino } x = 0: f(0; y) = \frac{0}{2(y-1)^3} = 0, y \neq 1 \qquad L_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 1} 0 = 0$$

$$\text{Camino } y = 1: f(x; 1) = \frac{0}{x^6} = 0, x \neq 0 \qquad L_{y=0} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

En este caso, se obtiene el mismo valor, así que tenemos que proceder con alguna otra curva que pase por el punto en cuestión.

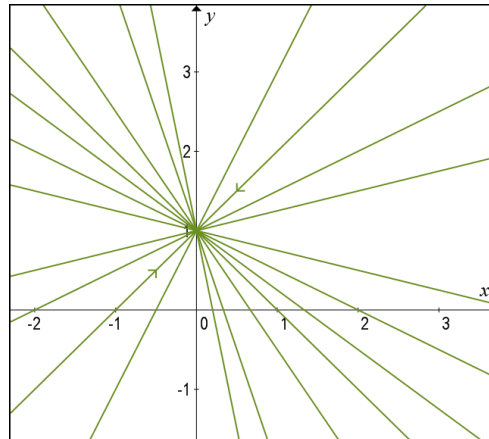
- Comencemos con alguna recta (no paralela a algún eje) que pase por el punto en cuestión, por ejemplo: $y = x + 1$.



$$\text{Camino } y = x + 1: f(x; x + 1) = \frac{x^4 \cdot (x+1-1)}{2(x+1-1)^3 + x^6} = \frac{x^5}{2x^3 + x^6} = \frac{x^2}{2 + x^3}, L_{y=x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 + x^3} = 0$$

Nuevamente, se obtiene 0. Si hubiéramos obtenido un resultado distinto al de los calculados en el punto anterior, podríamos decir que el límite no existe. Pero como no fue el caso, no es posible asegurar nada.

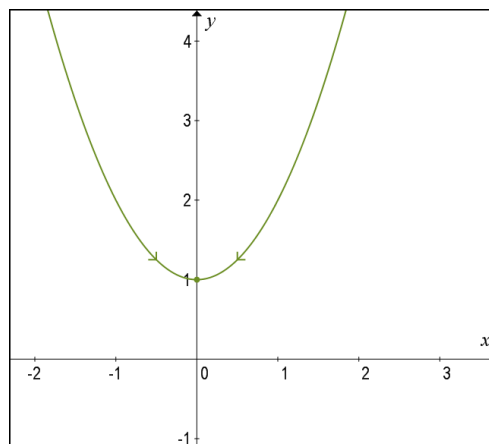
Si probamos por *cualquier* recta que pase por (0; 1): $y = mx + 1$



$$f(x; mx + 1) = \frac{x^4 \cdot (mx + 1 - 1)}{2(mx + 1 - 1)^3 + x^6} = \frac{mx^5}{2m^3x^3 + x^6} = \frac{mx^2}{2m^3 + x^3}, x \neq 0 \quad L_{y=mx+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{2m^3 + x^3} = 0$$

Vemos que, por todos estos caminos, también dará 0.

- Probemos ahora con alguna otra curva que contenga al punto, por ejemplo, la parábola de ecuación $y = x^2 + 1$:



$$f(x; x^2 + 1) = \frac{x^4 \cdot (x^2 + 1 - 1)}{2(x^2 + 1 - 1)^3 + x^6} = \frac{x^6}{2x^6 + x^6} = \frac{1}{3}, x \neq 0 \quad L_{y=x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- En el paso anterior, encontramos un valor de límite distinto al encontrado por otros caminos, y solo con eso podemos concluir entonces que:

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0;1)} \frac{x^4 \cdot (y - 1)}{2(y - 1)^3 + x^6}$$

Nota: Si tras probar varios caminos, resulta que todos ellos arrojan el mismo valor L , es muy probable entonces que el límite valga L y la única forma de probarlo es recurrir a la definición. Además, a excepción del punto al que se acerca, es necesario que al menos parte de la trayectoria que usamos para acercarnos, esté incluida en el dominio del campo.

Actividad 6. Calcular analíticamente los siguientes límites:

a) $\lim_{\vec{r} \rightarrow (1,1)} \frac{x \cdot y^2}{x^3 + y^3}$

b) $\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} x \cdot (y + 1) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

c) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{3x^2 + 3y^2}{\operatorname{sen}(2x^2 + 2y^2)}$

d) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$

e) $\lim_{(x;y) \rightarrow (1;1)} \frac{x \cdot y - 1}{x - y^2}$

f) $\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{x}{x + y}$

g) $\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{x \cdot y^2}{x^3 + y^3}$

h) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{-3xy}{5x^2 + 2y^2}$

Actividad 7. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando todas las respuestas:

- Podría existir el límite doble, y sin embargo no existir los que se obtienen al acercarse por las direcciones de los ejes x e y .
- Si los límites que se obtienen al acercarse por las direcciones de los ejes x e y son distintos, entonces puede asegurarse que no existe el límite doble.
- Si los límites que se obtienen al acercarse por las direcciones de los ejes x e y son iguales, entonces puede asegurarse que existe el límite doble.
- Si el límite de un campo al acercarse por la dirección del eje x existe, pero por la dirección del eje y no, entonces puede asegurarse que no existe el límite doble.
- Para calcular el límite doble de un campo f cuando $(x; y) \rightarrow (0; 1)$ por la trayectoria de rectas, se hace:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x; mx)$$

- El valor del límite que se obtiene para las trayectorias $x = y^2 + 1$ e $y = 4^{x-2}$ del campo de ley $f(x; y) = xy^2 - 4x + 1$ cuando $(x; y) \rightarrow (2; 1)$ es el mismo.
- Para el campo escalar de ecuación $f(x; y) = \frac{2xy}{x-y}$ puede calcularse el límite cuando $(x; y) \rightarrow (0; 0)$ por cualquier recta del plano que contenga al origen.

3.3.2. Álgebra de límites de campos escalares

Sabiendo que $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f(\vec{r}) = F$ y $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} g(\vec{r}) = G$, y que ambas funciones tienen su dominio incluido en \mathbb{R}^n entonces:

- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f(\vec{r}) + g(\vec{r})] = F + G$
- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [f(\vec{r}) \cdot g(\vec{r})] = F \cdot G$
- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \frac{f(\vec{r})}{g(\vec{r})} = \frac{F}{G}$ si $G \neq 0$

3.4. LÍMITE DE UN CAMPO VECTORIAL

Sea el campo vectorial $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y \vec{r}_0 un punto de acumulación de A , diremos que:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{f}(\vec{r}) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists \delta = \delta(\varepsilon) / \forall \vec{r} \in [E'(\vec{r}_0; \delta) \cap A] \Rightarrow \vec{f}(\vec{r}) \in E(\vec{L}; \varepsilon)$$

3.4.1. Relación entre el límite de un campo vectorial y el de sus componentes

Sea $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m / \vec{r} \in A \mapsto \vec{f}(\vec{r}) = (f_1(\vec{r}); f_2(\vec{r}); \dots; f_m(\vec{r})) \in \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y \vec{r}_0 un punto de acumulación de A , diremos que el límite de \vec{f} cuando \vec{r} tiende a \vec{r}_0 vale \vec{L} si y solo si existen cada uno de los siguientes límites de campos escalares:

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f_1(\vec{r}) = L_1, \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f_2(\vec{r}) = L_2, \dots \text{ y } \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} f_m(\vec{r}) = L_m$$

Y en tal caso será $\vec{L} = (L_1; L_2; \dots; L_m)$.

Ejemplo:

14) Considerando el campo vectorial cuya ley es

$$f(x; y) = (x - 2y + 3; \frac{\text{sen}(xy)}{2xy}; \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2})$$

el límite cuando $(x; y) \rightarrow (0; 0)$ no existe.

En efecto:

- Sin complicaciones mayores, se puede determinar que el $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x - 2y + 3)$ existe y vale 3.
- El límite $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{\text{sen}(xy)}{2xy}$ existe y vale $\frac{1}{2}$, utilizando la propiedad del seno cardinal para salvar la indeterminación.
- Pero en el ejemplo 12, hemos justificado por qué el $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

Al no existir el límite para una de las componentes, entonces no existe el límite buscado.

Actividad 8. Determinar si existen los siguientes límites:

a) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x + y; \frac{2x-y}{(x+1)^2}; \frac{3x+5y}{2x-3y})$

b) $\lim_{(x;y) \rightarrow (1;1)} (\frac{xy-1}{x^2-y}; x + y^2)$

c) $\lim_{(x;y) \rightarrow (1;0)} (2 + \text{sen}(xy); x + y^2)$

d) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (6x + 7y^2 - 1; \frac{x-y}{x+y})$

3.4.2. Álgebra de límites de campos vectoriales

Sabiendo que $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{f}(\vec{r}) = \vec{F}$ y $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{g}(\vec{r}) = \vec{G}$:

- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [\vec{f}(\vec{r}) + \vec{g}(\vec{r})] = \vec{F} + \vec{G}$
- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [k \cdot \vec{f}(\vec{r})] = k \cdot \vec{F}$
- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [\vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{g}(\vec{r})] = \vec{F} \cdot \vec{G}$
- $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} [\vec{f}(\vec{r}) \wedge \vec{g}(\vec{r})] = \vec{F} \wedge \vec{G}$

Si fueran posible de realizar estas últimas dos operaciones.

4. CONTINUIDAD

Sea $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de varias variables, diremos que \vec{f} resulta continua en \vec{r}_0 , punto de acumulación de A , si y sólo si:

$$\exists \vec{f}(\vec{r}_0) \quad \wedge \quad \exists \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{f}(\vec{r}) \quad \wedge \quad \vec{f}(\vec{r}_0) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{f}(\vec{r})$$

- Hemos definido continuidad en \vec{r}_0 si éste es punto de acumulación del dominio A . También es posible definir el concepto de continuidad para otro tipo de puntos llamados *puntos aislados*, pero ese trabajo escapa de los objetivos de estos textos.
- La definición es equivalente a pedir directamente la tercera condición, es decir: una función \vec{f} es continua en \vec{r}_0 si y solo si $\vec{f}(\vec{r}_0) = \lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{f}(\vec{r})$.
- Si dos funciones son continuas en un punto que se halla en el dominio de ambas, es posible estudiar la continuidad de la función resultado de operar entre ellas dos en dicho punto.

A continuación, se desarrollarán ejemplos para cada uno de los tipos de funciones vistas:

Ejemplos:

15) ¿Cuánto debe valer Ω en la ley de la función escalar $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x)}{4} & x \neq 0 \\ \Omega & x = 0 \end{cases}$

para que la misma resulte continua en $x = 0$?

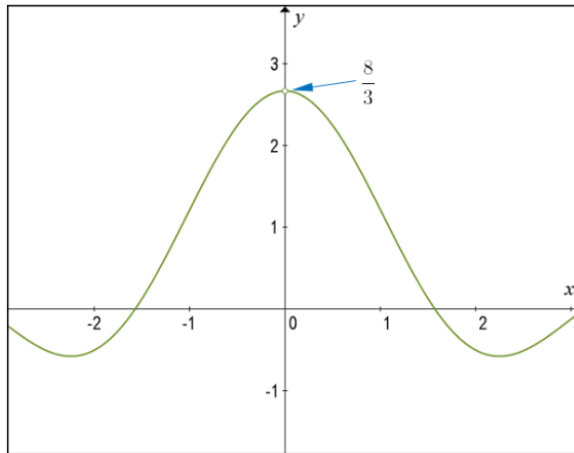
En primer lugar, notemos que f está definida en $x = 0$ y vale $f(0) = \Omega$.

Para obtener el límite de f cuando $x \rightarrow 0$, haremos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{\frac{3}{4}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen}(2x)}{\frac{3}{4} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen}(2x)}{\frac{3}{4} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{3}{4}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = \frac{8}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3}$$

Como $f(0)$ debe ser igual al $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{\frac{3}{4}x}$, entonces resulta $\Omega = \frac{8}{3}$.

En la figura se muestra la gráfica de la función de ley $y = \frac{\text{sen}(2x)}{\frac{3}{4}x}$ y cómo la posición de Ω en $\frac{8}{3}$ la haría continua en $x = 0$.



16) ¿Resulta $\vec{f}(t) = \frac{2t^2 - 2t}{t-1} \vec{i} + (t-3) \vec{j}$ continua en $t = 1$?

Daremos respuesta negativa a la pregunta, ya que si bien existe el límite de \vec{f} cuando t tiende a 1: $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{2t^2 - 2t}{t-1}; t-3 \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t^2 - 2t}{t-1}; \lim_{t \rightarrow 1} t-3 \right) = \left(\lim_{t \rightarrow 1} 2t; \lim_{t \rightarrow 1} t-3 \right) = (2; -2)$; no existe la imagen de $t = 1$ por \vec{f} .

17) El campo escalar de ecuación $f(x; y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \vec{r} \neq \vec{0} \\ 0 & \vec{r} = \vec{0} \end{cases}$ no es continuo en $(0; 0)$

Por un lado, existe $f(0; 0)$ y vale 0, de acuerdo con la ley por partes. Si analizamos el límite del campo cuando $\vec{r} \rightarrow (0; 0)$ siguiendo la trayectoria de parábolas con vértice en el origen de la forma $x = ay^2$, obtenemos que el límite no existe al depender del valor a de la parábola:

$$f(ay^2; y) = \frac{ay^2 y^2}{(ay^2)^2 + y^4} = \frac{ay^4}{a^2 y^4 + y^4} = \frac{a}{a^2 + 1} \text{ con } y \neq 0 \qquad L_{x=ay^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + 1} = \frac{a}{a^2 + 1}$$

4.1. CONTINUIDAD EN UN CONJUNTO

Sea $\vec{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de varias variables, diremos \vec{f} resulta continua en el conjunto $B \subseteq A$ si y sólo si \vec{f} es continua en cada punto $\vec{r}_0 \in B$.

Ejemplo:

18) ¿En qué conjunto del plano el campo escalar de ley $f(x; y) = \frac{xy}{x-y}$ es continuo?

Siempre que $a \neq b$, se verifica que:

Existen la imagen $f(a; b) = \frac{ab}{a-b}$ y el límite $\lim_{(x;y) \rightarrow (a;b)} \frac{xy}{x-y} = \frac{ab}{a-b}$ y además son iguales.

Por lo que el campo resulta continuo en el conjunto $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$

4.2. DISCONTINUIDAD Y SU CLASIFICACIÓN

Sea $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función no continua en un $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$, diremos que \bar{f} presenta una discontinuidad evitable en \bar{r}_0 si existe el $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{f}(\bar{r})$.

De lo contrario, la discontinuidad es inevitable.

Ejemplos:

19) La función escalar de ley $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ tiene en $x = 0$ una discontinuidad evitable.

Pues si bien no existe la imagen de $x = 0$, existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

20) La función vectorial de ley $\bar{f}(t) = \begin{cases} (t + 4; t + 3; t) & \forall t \leq 4 \\ (16 - 2t; 3t - 5; 2) & \forall t > 4 \end{cases}$ presenta una discontinuidad inevitable en $t = 4$. ¿Por qué?

Porque la imagen de $t = 4$ es $\bar{f}(4) = (8; 7; 4)$ y el límite no existe al ser distintos los laterales.

Actividad 9. Estudiar la continuidad del campo escalar de ley $z(x; y) = \frac{y}{x+y}$ en el punto $\bar{r} = (0; 0)$.

Actividad 10. Analizar la continuidad del campo $\bar{F}(x; y) = (\frac{2xy}{x^2+y^2}; x - y; x + 2y)$ en el punto $\bar{r} = (0; 0)$

Actividad 11. Dada la función vectorial cuya ley es:

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} \left(t + 4; \frac{t^2 - t}{t}; \frac{\text{sen}(t)}{t} \right) & t \neq 0 \\ (\alpha - 1; \alpha - 6; \alpha - 4) & t = 0 \end{cases}$$

¿Existe algún valor de α tal que la función sea continua en $t = 0$? Justificar la respuesta.

Actividad 12. Sea la función vectorial cuya ley es $\bar{f}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\text{sen}(5t)}{2t}; \frac{t}{t^2-3t} \right) & t \neq 0 \\ \bar{f}(0) & t = 0 \end{cases}$.

Determinar cuánto debe valer $\bar{f}(0)$ para que la función sea continua en $t = 0$. Justificar la respuesta.

Actividad 13. Sea la función vectorial cuya ley es:

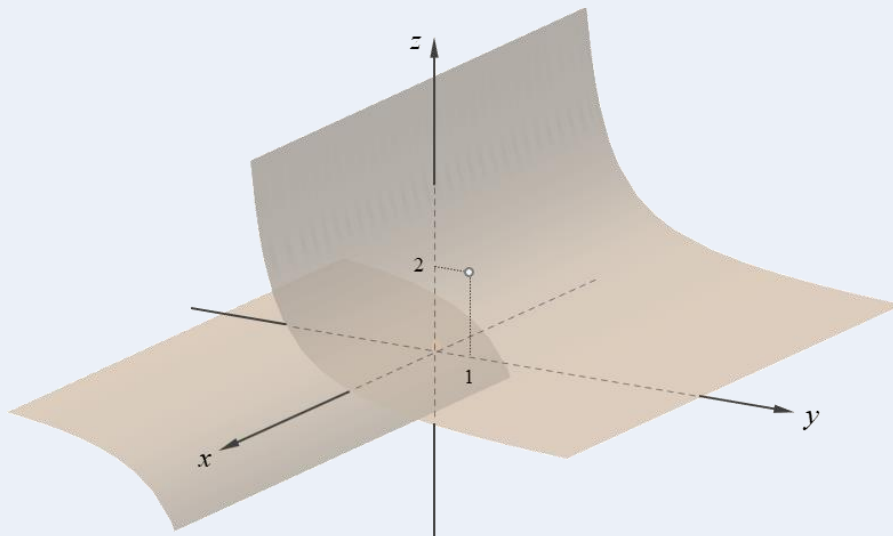
$$\bar{f}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\text{sen}(t-\pi)}{\pi-t}; \cos t; \frac{t^2-\pi t}{t-\pi} \right) & t \neq \pi \\ (-1; -1; \pi) & t = \pi \end{cases}$$

Determinar si la misma es continua en $t = \pi$. Justificar la respuesta.

Actividad 14. Estudiar la continuidad del campo $z = \frac{\text{sen}(x+y)}{x+y}$ en el punto $(0; 0)$.

REVISIÓN FINAL DE LA UNIDAD

1) La siguiente es la gráfica del campo escalar de ley $f(x; y) = \frac{4xy-4x}{xy^2-x}$.



- a) ¿Cuál es su dominio de definición?
- b) El límite para f cuando $(x; y) \rightarrow (0; 1)$ existe y vale 2.
- Probar lo anterior con un cálculo analítico (no por definición).
 - En la siguiente figura, se considera un acercamiento a $(0; 1)$ por una recta que contiene a tal punto, y puede observarse que las imágenes de esa región tienden a 2.
- Indicar cómo se llama este tipo de límite y probarlo para *cualquier recta* que pase por $(0; 1)$.

2) Sea la función vectorial de ley $\vec{f}(t) = \left(\frac{t^2+at}{t}\right)\vec{i} + (a-1+t)\vec{j}$, se pide:

a) Determinar si existe un valor de a que hace que el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t)$$

valga lo mismo que la imagen de $t = 3$ por la función de ley $\vec{g}(t) = (2^t; 2t + 1)$.

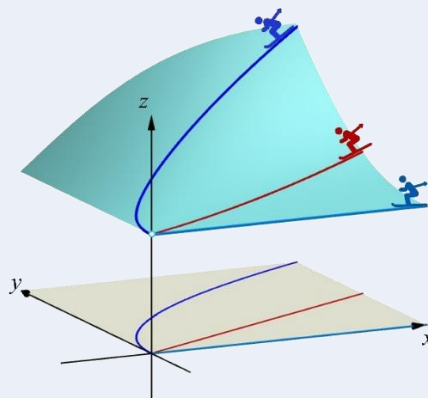
b) Para el valor obtenido en el punto anterior, estudiar la continuidad de \vec{f} en $t = 0$.

3) Tres esquiadores parten de tres puntos distintos sobre una montaña que sigue la forma de la superficie de ecuación:

$$f(x; y) = \frac{xy^3 + 8 \cdot (x^2 + y^2)}{4x^2 + 4y^2}$$

Toman distintos caminos con el objetivo de llegar al mismo punto $(0; 0; h)$. Cada uno de estos caminos sobre la superficie están guiados por sus proyecciones sobre el plano xy como se muestran en la figura, las cuáles son:

- a) el eje x
- b) la recta $2y = x$
- c) la parábola $x = y^2$



Probar utilizando límites de un campo escalar, que todos culminan en la misma posición $(0; 0; h)$.

4) En el momento en el que se abre un grifo, comienza a salir agua a través de una tubería. Si el tiempo t se mide en segundos, el agua debería tardar exactamente dos segundos en recorrer la tubería completa, atravesando las posiciones en el espacio dadas por:

$$\vec{r}(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{2t-2} \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j} + \left(4 + \frac{t^2-1}{-1+t}\right) \cdot \vec{k}$$

Sin embargo, hay una filtración que provoca que el agua se escape.

- Actividad 1) a) $E(x_0; \delta) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$
Intervalo abierto de extremos $x_0 - \delta$ y $x_0 + \delta$
- b) $E[(x_0; y_0); \delta] = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$
Interior de la circunferencia de centro $(x_0; y_0)$ y radio de longitud δ
- c) $E[(x_0; y_0; z_0); \delta] = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\}$
Interior de la superficie esférica de centro $(x_0; y_0; z_0)$ y radio de longitud δ
- Actividad 2) Idem anterior, sin el centro.
- Actividad 3) a) \emptyset b) \mathbb{R} c) $[3; +\infty[$ d) $[-1; 3]$
- e) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 3\}$ f) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$
- Actividad 4) a) 12 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $-\frac{7}{2}$ e) 1 f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- Actividad 5) a) \nexists b) $(2; 1; -1)$ c) $(1; -2; 1)$
- Actividad 6) a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 0 e) \nexists f) \nexists g) \nexists h) \nexists
- Actividad 8) a) \nexists b) \nexists c) $(2; 1)$ d) \nexists
- Actividad 9) Discontinuidad inevitable.
- Actividad 10) Discontinuidad inevitable.
- Actividad 11) $\alpha = 5$
- Actividad 12) $\bar{f}(0) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{3}\right)$
- Actividad 13) Continua en $t = \pi$
- Actividad 14) Discontinuidad evitable.

4. Derivadas

1. INTRODUCCIÓN

Anteriormente, hemos estudiado la definición de derivada de una función escalar en un punto de su dominio: si x_0 es punto interior del dominio de una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se llama derivada de f en x_0 al siguiente límite en el caso en que exista:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{o} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En cualquiera de los dos casos, se trata de encontrar el siguiente valor: si a partir del punto $(x_0; f(x_0))$ nos movemos sobre la curva de f hasta el punto $(x_0 + h; f(x_0 + h))$ y calculamos el cociente incremental $\Delta f / \Delta x$ que estos dos puntos generan, interesa saber qué sucede con tal cociente a medida que acercamos el segundo punto hacia el primero ($h \rightarrow 0$).

Lo importante, por el momento es destacar que cuando incrementamos desde x_0 hasta $x_0 + h$ solamente tenemos *una dirección posible* para hacerlo, con dos sentidos (por izquierda o por derecha). Nuevamente, esto se da así pues el dominio de una función escalar es un conjunto contenido en \mathbb{R} . También las funciones vectoriales tienen dominio contenido en los reales, por lo que derivada se definirá de manera similar. Pero para los campos (escalares o vectoriales), al ser el dominio un subconjunto de \mathbb{R}^n , tendremos infinitas direcciones para “mover” la variable independiente.

En estos textos vamos a analizar qué sucede con la derivada para todos los tipos de funciones vistas, previamente definiendo el concepto de punto interior de un punto del conjunto \mathbb{R}^n .

2. PUNTO INTERIOR DE UN CONJUNTO

Sea $\bar{r}_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que \bar{r}_0 es punto interior del conjunto A si y solo si:

$$\exists \delta > 0 / E[\bar{r}_0; \delta] \subset A$$

Lo anterior significa que \bar{r}_0 será punto interior de A si existe al menos un entorno con centro en \bar{r}_0 y radio δ de manera que el mismo quede incluido en el conjunto A . Es importante destacar que, a diferencia de los puntos de acumulación, es estrictamente necesario que el punto pertenezca al conjunto para ser punto interior del mismo.

Si en un conjunto todos sus puntos son interiores, entonces se dice que es *abierto*.

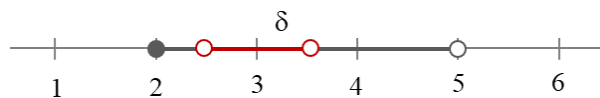
Ejemplos:

3)

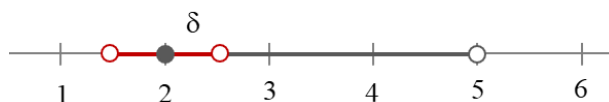
que se muestra en la figura:



Por ejemplo, $x = 3$ es punto interior de A . En efecto, existe al menos un entorno de centro 3 y radio δ (como se muestra en la figura) que queda contenido en el conjunto:

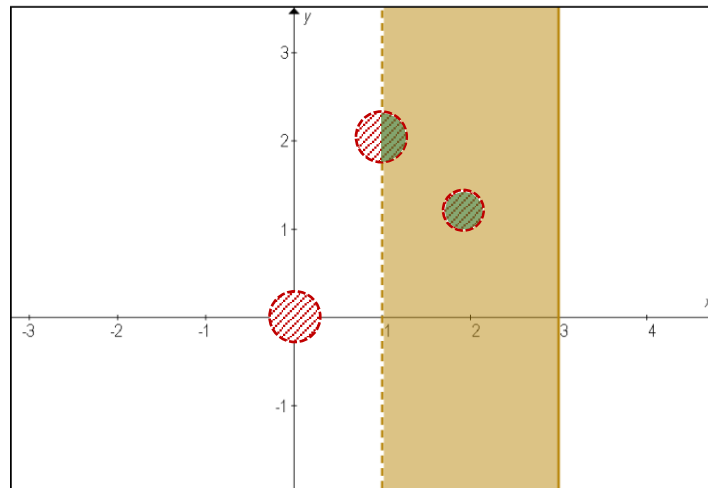


En cambio, a pesar de pertenecer al conjunto, $x = 2$ no es punto interior de A porque no es posible establecer siquiera un entorno de centro 2 que quede contenido en A (los puntos a la izquierda de 2 quedan siempre fuera del conjunto A).



$x = 5$ tampoco es punto interior de A pues directamente ni siquiera pertenece al conjunto A . Son puntos interiores de A todos los $2 < x < 5$. Lo anotaremos $A_i =]2; 5[$

2) Sea el conjunto $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x \leq 3\}$, cuya gráfica se muestra:



El origen de coordenadas no es punto interior de A ni cualquier punto sobre las rectas de ecuaciones $x = 1$ o $x = 3$. En cambio, son puntos interiores de A todos los puntos del plano tales que $1 < x < 3$.

Es decir, $A_i = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x < 3\}$.

Actividad 1. Determinar cuáles son los puntos interiores de los siguientes conjuntos:

a) \mathbb{N}

d) $D = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3 \vee x = 5\}$

b) \mathbb{R}

e) $E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1 \vee 1 < x < 3\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

f) $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge y \neq x\}$

3. DERIVADA

A continuación, realizaremos la definición de derivada para cualquier tipo de función, y luego adaptaremos a la misma para cada caso de función vista.

Sea una función $\bar{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, \bar{r}_0 un punto interior del conjunto A , y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario (versor), diremos que \bar{f} es derivable en \bar{r}_0 si y solo si existe la expresión $D_{\bar{a}}\bar{f}(\bar{r}_0)$ que calcularemos:

$$D_{\bar{a}}\bar{f}(\bar{r}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(\bar{r}_0 + h\bar{a}) - \bar{f}(\bar{r}_0)}{h} \text{ con } h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y en tal caso se llamará derivada direccional de \bar{f} calculada en \bar{r}_0 , en dirección y sentido del versor \bar{a} .

Para los casos de las funciones escalares y las funciones vectoriales, sucede que al tener el dominio contenido en el conjunto de los reales, desde un punto x_0 (o t_0) podremos encontrar al valor $x_0 + h$ (o $t_0 + h$) avanzando en una única dirección: la del eje x (o t) y es por esto que carece de sentido especificar una dirección y sentido en estos dos casos, y hablar de una *derivada direccional*.

Estudiaremos entonces, cómo se adapta la definición de derivada dada para cualquier tipo de función a cada una de las funciones particulares que venimos estudiando.

3.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Dada una función escalar $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un punto interior del conjunto A , diremos que f es derivable en x_0 si y solo si existe el número $f'(x_0)$ que calcularemos:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ con } h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y en tal caso se llamará derivada de f calculada en x_0 .

Ya hemos estudiado en Cálculo que las derivadas se calculan puntualmente en un valor del dominio de f (como lo indica la definición), y que luego se puede extender el concepto de función derivable en un intervalo abierto $A_1 \subseteq A$. Este conjunto A_1 es el dominio de una nueva función que se puede definir a partir de f , que se conoce como *función derivada* y se indica f' . Repitiendo este procedimiento, obtenemos las que se conocen como derivadas sucesivas: f'' , f''' , $f^{(iv)}$, etc.

Para facilitar el cálculo de una derivada, podemos acudir a lo que se conoce como tabla de derivadas, y estudiamos también el álgebra de derivadas de funciones escalares (derivada de la suma, del producto, del cociente, del logaritmo, de funciones compuestas, etc.)

También estudiamos cómo se interpreta el valor $f'(x_0)$: es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0; f(x_0))$. A partir de esto, podíamos deducir la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto:

$$\delta_{tg}) \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Recordemos también que estudiamos la relación que existía entre la derivada de una función en un punto y la continuidad de la misma en él:

$$f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0$$

Y por último, hemos visto los tres casos en que una función no resultaba derivable en un punto:

- f discontinua en x_0
- La gráfica de f tiene un punto anguloso (o cuspidal) en $(x_0; f(x_0))$
- La gráfica de f tiene recta tangente vertical en $(x_0; f(x_0))$

Actividad 2. Hallar la ley de las derivadas de las siguientes funciones escalares:

a) $f(x) = x^3 \cdot \text{sen}(x)$

b) $g(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$

c) $h(x) = \frac{3-x}{\text{tg}(x)}$

d) $f(x) = \text{sen}(\sqrt{x^3 \cdot 2^x})$

Actividad 3. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(x)$ en el punto $(1; f(1))$. Graficar.

3.2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Dada una función vectorial $\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, t_0 un punto interior del conjunto A , diremos que \vec{r} es derivable en t_0 si y solo si existe el vector $\vec{r}'(t_0)$ que calcularemos:

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} \text{ con } h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y en tal caso se llamará derivada de \vec{r} calculada en t_0 .

Al igual que sucede con el cálculo de límites, para el cálculo de la derivada de una función vectorial no habrá diferencias grandes con los cálculos de las derivadas vistas para las funciones escalares. Sin embargo, como la derivada tiene la forma de los elementos del conjunto de llegada de la función, al ser una función vectorial, éstas no serán números reales sino vectores (puntos).

3.2.1. Relación entre la derivada de una función vectorial y la de sus componentes

Supongamos que se quiere calcular la derivada de la función vectorial de ley:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (r_1(t); r_2(t); \dots; r_m(t))$$

Las funciones componentes de la función vectorial $\vec{r}(t)$ son funciones escalares: $r_1(t)$, $r_2(t)$, ..., $r_m(t)$.

Para que exista la derivada $\vec{r}'(t_0)$ basta con que existan las derivadas:

$$r_1'(t_0), r_2'(t_0), \dots, r_m'(t_0)$$

y vale $\vec{r}'(t_0) = (r_1'(t_0); r_2'(t_0); \dots; r_m'(t_0))$.

Ejemplo:

10) La derivada de la función vectorial cuya ley es $\vec{r}(t) = (t^2 + 3t^3; te^t)$ es también otra función vectorial cuya ley es $\vec{r}'(t) = (2t + 9t^2; e^t + te^t)$.

Actividad 4. Determinar las leyes de las funciones derivadas de las funciones vectoriales dadas, aplicando reglas de derivación conocidas:

a) $\bar{r}(t) = (2t^2 + 5t^3 + t - 3; \cos t + \sin t)$

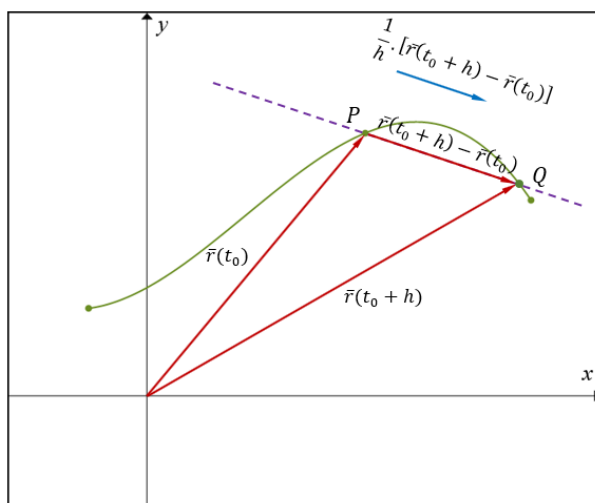
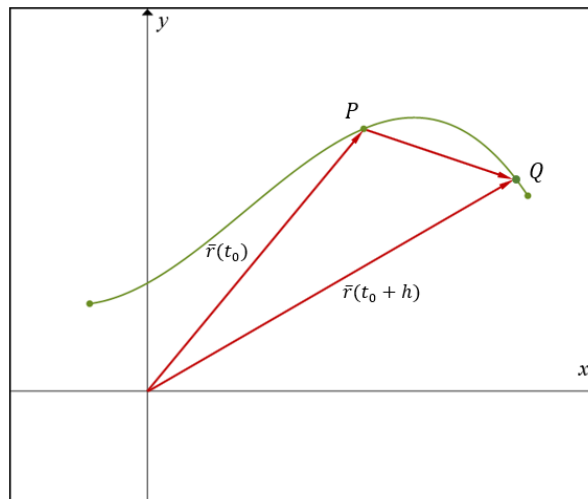
b) $\bar{r}(t) = (t^2 - e^t; 1 + \ln t)$

c) $\bar{f}(t) = \left(\frac{1+2t}{4t^2-1}; \sin(\ln(t))\right)$

3.2.2. Interpretación geométrica

Sea $\bar{r}: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial y $\bar{r}'(t_0)$ la derivada de \bar{r} en un t_0 , punto interior de su dominio, podemos interpretar gráficamente qué representa $\bar{r}'(t_0)$ solamente en aquellos casos en que $m = 2$ o $m = 3$.

Llamemos P al punto del plano que tiene las coordenadas $\bar{r}(t_0)$, y Q al punto que tiene como coordenadas la imagen del valor t_0 incrementado en h , es decir $\bar{r}(t_0 + h)$. Además, dibujamos los vectores $\bar{r}(t_0)$ y $\bar{r}(t_0 + h)$ como vectores posición, es decir como vectores con origen en $(0; 0)$ y extremos en los puntos P y Q , respectivamente.



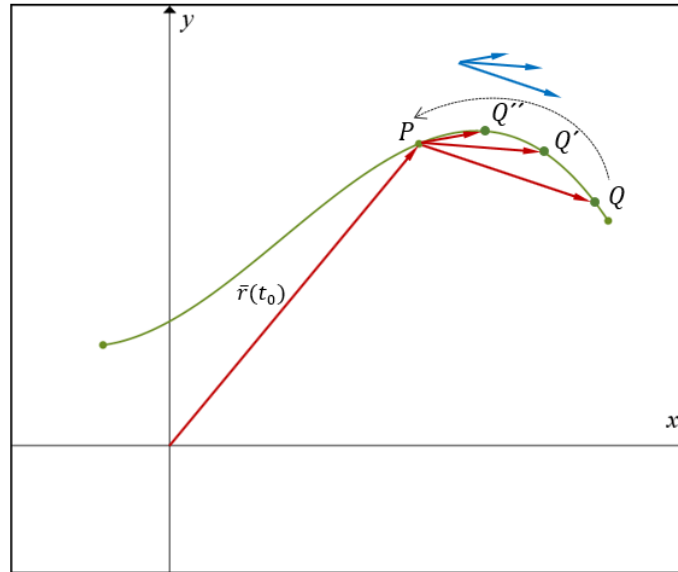
Por suma de vectores, resulta:

$$\bar{r}(t_0) + \overrightarrow{PQ} = \bar{r}(t_0 + h),$$

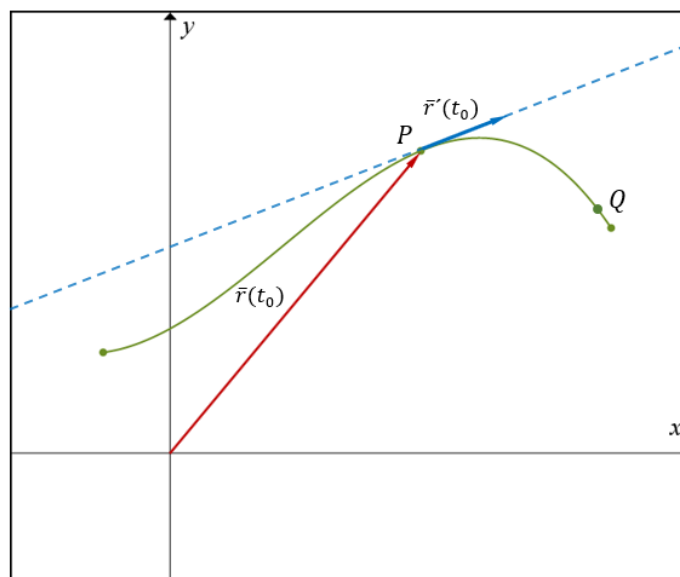
de donde el vector \overrightarrow{PQ} es la diferencia entre $\bar{r}(t_0 + h)$ y $\bar{r}(t_0)$ y el mismo se encuentra contenido en una recta secante a la curva, como muestra la figura.

Además, podemos notar que si $h > 0$, el vector $\frac{1}{h} \cdot [\bar{r}(t_0 + h) - \bar{r}(t_0)]$ resulta tener la misma dirección y mismo sentido que $\bar{r}(t_0 + h) - \bar{r}(t_0)$.

Que $h \rightarrow 0$ significa gráficamente que el punto Q se irá acercando hacia P , como muestra la figura:



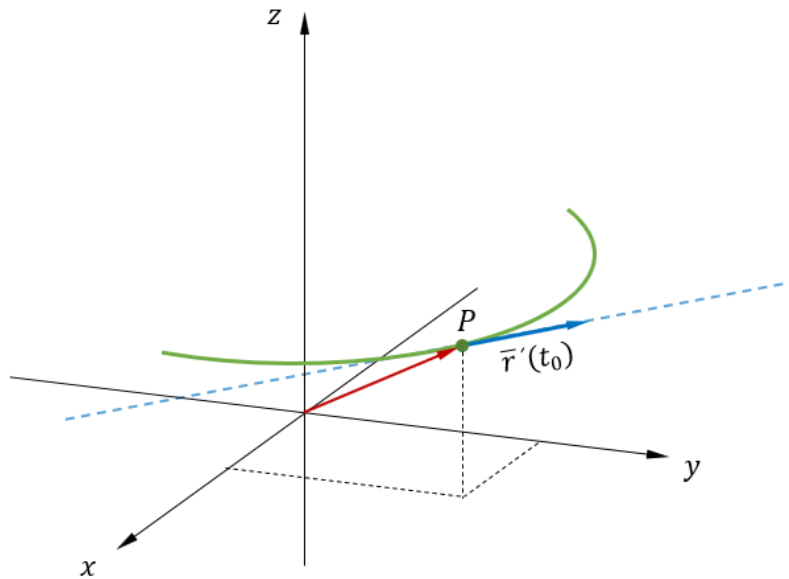
Cuando $h \rightarrow 0$, el vector $\frac{1}{h} \cdot [\bar{f}(t_0 + h) - \bar{f}(t_0)]$ se aproxima a un vector que está sobre la recta tangente a la curva en el punto P , como muestra la siguiente figura:



Por lo entonces el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t_0+h) - \bar{r}(t_0)}{h} = \bar{r}'(t_0)$ se interpreta geoméricamente como un vector tangente a la curva imagen de \bar{r} en el punto $\bar{r}(t_0)$.

Se puede realizar un razonamiento análogo si $h < 0$, arribando a la misma conclusión.

Para una curva del espacio, $\bar{r}'(t_0)$ también representa un vector tangente a la curva en $\bar{r}(t_0)$, como muestra la figura:



Actividad 5. Para las siguientes curvas paramétricas, determinar las componentes de un vector tangente para el valor de t pedido, y verificar gráficamente dicha tangencia:

a) $\vec{r}(t) = (1 + 2 \cos t; 3 - 4 \sin t)$ para $t = \frac{\pi}{2}$

b) $\vec{r}(t) = (1 + t; 2 - t^2)$ para $t = 1$

Actividad 6. Se tiene la función vectorial de ecuación $\vec{r}(t) = (t; t^2 - 4t + 3)$ en donde $0 \leq t \leq 4$:

a) Graficar el conjunto imagen.

b) Hallar $\vec{r}'(t)$.

c) Hallar $\vec{r}'(3)$ y mostrar su significado gráfico.

d) ¿Para qué valor de t la segunda componente del vector tangente es nula?

Actividad 7. En el espacio se tiene el conjunto imagen de la función vectorial de ecuación $\vec{r}(t) = (2 \cos(t); 2 \sin(t); 6 - 2 \cos(t))$ con dominio $D = [-\pi; 2\pi]$. Se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(2; 0; 4)$.

b) Determinar para qué valor de t , el vector tangente a la curva tiene como tercera componente $\sqrt{2}$.

3.2.3. Curva regular o suave

Una curva de parametrización $\vec{r} = \vec{r}(t)$ es *regular* o *suave* en un intervalo I si y solo si:

$$\vec{r} \text{ es continua en } I \text{ y } \exists \vec{r}'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in I$$

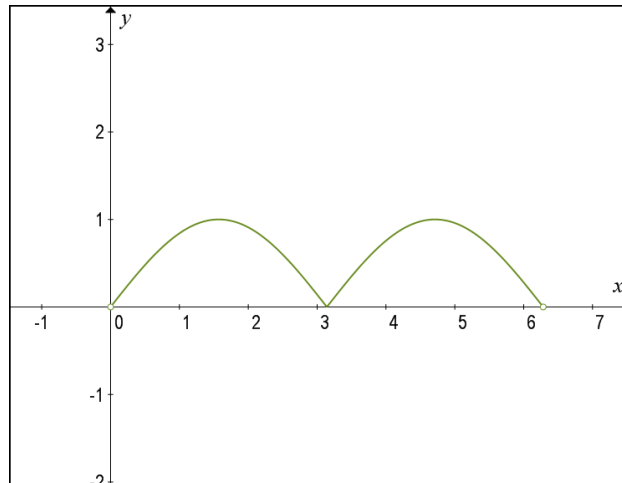
En tal caso, diremos que todos sus puntos son regulares.

Si la curva es regular en todos sus puntos, excepto en un número finito de ellos, diremos que la misma es *seccionalmente regular*.

Ejemplo:

11) Se tiene la curva de parametrización $\vec{r}(t) = (t; |\text{sen}(t)|)$ con $0 < t < 2\pi$, como se muestra en la figura.

La misma es seccionalmente regular, por ser regular en $]0; 2\pi[-\{\pi\}$.



Gráficamente, podemos observar que la imagen de $t = \pi$ resulta ser un punto anguloso de la curva, y eso coincide con el hecho de que no exista $\vec{r}'(\pi)$.

3.2.4. Curva de Jordan

Una curva de parametrización $\vec{r} = \vec{r}(t)$ con $t \in [a; b]$ es una *curva de Jordan* si y solo si:

- \vec{r} es continua en $[a; b]$,
- $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, es decir, la curva es cerrada,
- \vec{r} es inyectiva en $[a; b[$, es decir, no se cruza a sí misma.

Ejemplo:

12) La circunferencia de parametrización $\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot \cos(t) \\ y = 1 + 3 \cdot \text{sen}(t) \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ es de Jordan.

3.2.5. Álgebra de derivadas de funciones vectoriales

Sean \vec{f} y \vec{g} con conjunto imagen incluido en \mathbb{R}^m y ambas derivables en $t = t_0$, entonces:

- $(\vec{f} + \vec{g})'(t_0) = \vec{f}'(t_0) + \vec{g}'(t_0)$
- $(k \cdot \vec{f})'(t_0) = k \cdot \vec{f}'(t_0)$

- $(\bar{f} \cdot \bar{g})'(t_0) = \bar{f}'(t_0) \cdot \bar{g}(t_0) + \bar{f}(t_0) \cdot \bar{g}'(t_0)$
- $(\bar{f} \wedge \bar{g})'(t_0) = \bar{f}'(t_0) \wedge \bar{g}(t_0) + \bar{f}(t_0) \wedge \bar{g}'(t_0)$ solamente para el caso $m = 3$.

3.3. DERIVADA DE UN CAMPO ESCALAR

A diferencia de lo que ocurre con las funciones escalares y vectoriales, y nuevamente realizando una observación similar a la que hicimos para definir límite de campos, resulta que como estos tienen su dominio en un conjunto \mathbb{R}^n distinto de los reales, entonces no habrá una sola dirección y será necesario especificarla.

De allí que el concepto de derivada para los campos escalares y vectoriales recibe el nombre de derivada *direccional*.

Sea un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, \bar{r}_0 un punto interior del conjunto A , y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario (versor), diremos que f es derivable en \bar{r}_0 si y solo si existe el número $D_{\bar{a}}f(\bar{r}_0)$ que calcularemos:

$$D_{\bar{a}}f(\bar{r}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{r}_0 + h\bar{a}) - f(\bar{r}_0)}{h} \text{ con } h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y en tal caso se llamará derivada direccional de f calculada en \bar{r}_0 , en dirección y sentido del versor \bar{a} .

A continuación, analizaremos particularmente el caso en el que $n = 2$.

3.3.1. Derivada de un campo escalar con dominio en \mathbb{R}^2

Adaptaremos la definición anterior al caso particular en que los campos escalares tengan su dominio contenido en el plano, debido principalmente a la ventaja de poder interpretarlo de manera geométrica.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0)$ un punto interior del conjunto A y $\bar{a} = (a_x; a_y)$ un vector de módulo 1. Llamamos derivada direccional de f en \bar{r}_0 según la dirección y sentido del versor \bar{a} al valor:

$$D_{\bar{a}}f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x_0; y_0) + (a_x; a_y) \cdot h] - f(x_0; y_0)}{h}, \text{ con } h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Ejemplos:

13) ¿Cuál es el valor de la derivada del campo de ley $f(x; y) = 1 + x + 2y + xy$ en el punto $(1; 0)$ según la dirección que une los puntos $A(2; 5)$ con $B(6; 2)$, en ese sentido?

En primer lugar, debemos tener la dirección dada según un versor. En este ejemplo, el dato que tenemos sobre la dirección es que es la misma que la de la recta que une dos

puntos. Formamos el vector $\vec{AB} \rightarrow (4; -3)$ y al ser $|\vec{AB}| = 5$, entonces tomaremos como vector unitario para el cálculo de la derivada a $\vec{a} \rightarrow (4/5; -3/5)$.

Luego, aplicando la definición:

$$D_{\vec{a}}f(1; 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + \frac{4}{5}h; -\frac{3}{5}h) - f(1; 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 1 + \frac{4}{5}h + 2 \cdot (-\frac{3}{5}h) + (1 + \frac{4}{5}h) \cdot (-\frac{3}{5}h) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{12}{25}h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-\frac{12}{25}h - 1) = -1$$

14) ¿Qué valor tiene la derivada del campo de ley $f(x; y) = 2xy^2$ en el punto genérico $(x; y)$ en dirección del eje y con sentido positivo?

Evidentemente, consideraremos $\vec{a} = \vec{j} \rightarrow (0; 1)$ para el cálculo de la derivada:

$$D_{\vec{j}}f(x; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x; y+h) - f(x; y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x(y+h)^2 - 2xy^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xyh + 2xh^2}{h} = 4xy$$

Actividad 8. Hallar por definición el valor de las siguientes derivadas direccionales en el punto indicado y según la dirección indicada:

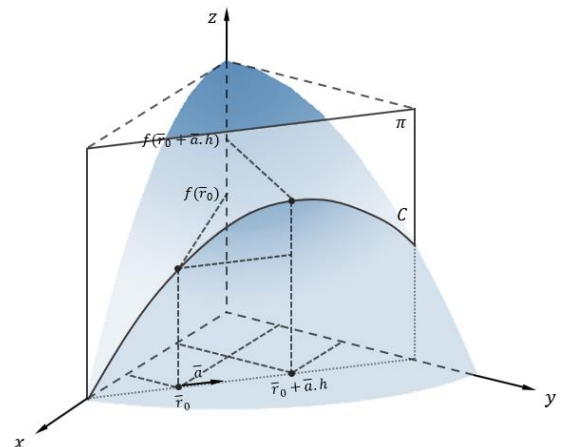
- | | | |
|--------------------------------|------------------------|---|
| a) $f(x; y) = x^2 + y$ | $(x_0; y_0) = (1; 2)$ | dirección del vector $-\vec{i}$ |
| b) $f(x; y) = y \cdot x^3 + 4$ | $(x_0; y_0) = (1; 7)$ | dirección del vector \vec{i} |
| c) $f(x; y) = x - y + xy$ | $(x_0; y_0) = (1; -1)$ | dirección del vector $\vec{u} \rightarrow (12; -5)$ |
| d) $f(x; y) = 4xy + x^2$ | $(x_0; y_0) = (1; 4)$ | dirección desde $P(1; 3)$ a $Q(-2; 1)$ |

Interpretación geométrica

De la expresión

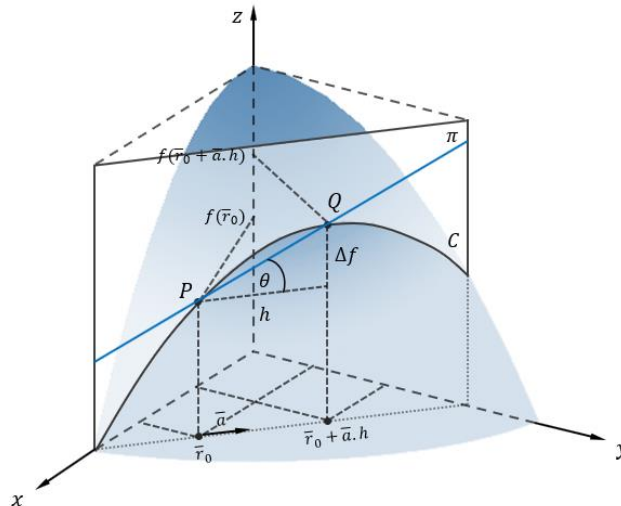
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x_0; y_0) + (a_x; a_y) \cdot h] - f(x_0; y_0)}{h}$$

ubicamos todos los datos en la gráfica del campo escalar f , y llamamos π al plano perpendicular al plano xy que contiene a los puntos \vec{r}_0 y $\vec{r}_0 + \vec{a}h = (x_0 + a_x h; y_0 + a_y h)$. Este plano interseca a la superficie de ecuación $f = f(x; y)$ en una curva a la que llamaremos C :

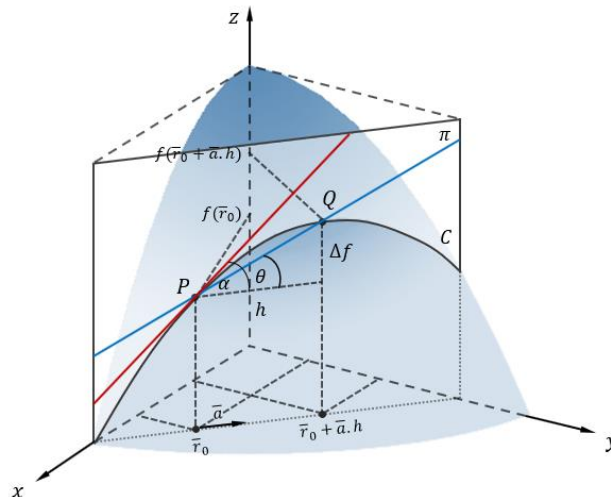


Si llamamos P al punto de coordenadas $(\bar{r}_0; f(\bar{r}_0))$ y Q al punto $(\bar{r}_0 + \bar{a}.h; f(\bar{r}_0 + \bar{a}.h))$, entonces podemos trazar una recta que pase por ambos, y ésta resultará secante a la curva C . Si consideramos $h > 0$, la pendiente de esta recta estará dada por el cociente:

$$tg(\theta) = \frac{\Delta f}{h}$$



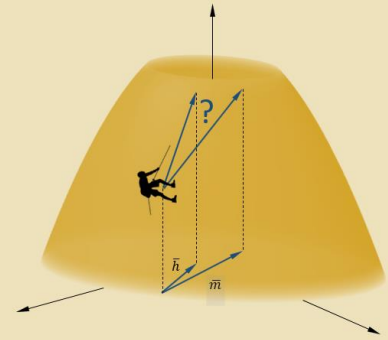
La expresión $h \rightarrow 0$, significa gráficamente que el punto Q se va acercando hacia P . En una posición límite, la recta secante se transforma en una recta tangente cuya pendiente está dada por $tg(\alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h}$:



Con lo cual, concluimos:

La derivada direccional $D_{\bar{a}}f(x_0; y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la superficie $f = f(x; y)$ y el plano que contiene a los puntos $(\bar{r}_0; 0)$, $(\bar{r}_0 + \bar{a}h; 0)$ y $(\bar{r}_0; f(\bar{r}_0))$, produciéndose dicha tangencia en el punto $(\bar{r}_0; f(\bar{r}_0))$.

Actividad 9. Un hombre está escalando una montaña, cuya altura en cierto sector, puede modelizarse a partir de la ecuación $z = 4 - (x^2 + xy + y^2)$. Cuando llega al punto $(1,2; 0,5; 1,71)$ se topa con una bifurcación que le ofrece dos caminos posibles: tomar la dirección y sentido dados por $\vec{h} \rightarrow (-1; -1)$ o los dados por $\vec{m} \rightarrow (-3; -1)$. Determinar por qué camino realizaría menor esfuerzo.



3.3.2. Derivadas parciales

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, \vec{r}_0 punto interior de A y $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario, la derivada direccional recibe el nombre de *derivada parcial* si en particular \vec{a} se obtiene del siguiente conjunto:

$$\{\vec{a} \rightarrow (a_1; a_2; \dots; a_n) / a_i = 1 \wedge a_{j \neq i} = 0, \text{ con } i = 1; \dots; n \text{ y } j = 1; \dots; n\}$$

Caso particular

Analizaremos en particular aquellos derivadas parciales de campos escalares cuyos dominios puedan representarse gráficamente. Esto es, para $n = 2$ (dominio en el plano) o $n = 3$ (dominio en el espacio).

Si $n = 2$, entonces los versores que dan la dirección y sentido de la derivada direccional son los versores $\vec{i} \rightarrow (1; 0)$ y $\vec{j} \rightarrow (0; 1)$, generando las denominadas primera derivada parcial y segunda derivada parcial del campo f , respectivamente.

Sus expresiones son:

$$D_{\vec{i}}f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0; y_0) + (1; 0) \cdot h) - f(x_0; y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h}$$

$$D_{\vec{j}}f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0; y_0) + (0; 1) \cdot h) - f(x_0; y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + h) - f(x_0; y_0)}{h}$$

Aunque también son usuales las siguientes notaciones:

Para la primera derivada parcial: $f_x(x_0; y_0)$ o $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0)$.

Para la segunda derivada parcial: $f_y(x_0; y_0)$ o $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0)$.

Ejemplo:

15) Sea el campo escalar de ecuación $f(x; y) = 2x + x^2y$, sus derivadas parciales en un punto genérico $(x; y)$ son:

$$f_x(x; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h; y) - f(x; y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) + (x+h)^2 y - (2x + x^2 y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h + x^2 y + 2xhy + h^2 y - 2x - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + 2xyh + h^2 y}{h} = 2 + 2xy$$

$$f_y(x; y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x; y+h) - f(x; y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 \cdot (y+h) - (2x + x^2 y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 y + x^2 h - 2x - x^2 y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 h}{h} = x^2$$

Las hemos calculado en cualquier punto genérico $(x; y)$, aunque también las podríamos haberlas calculado para algún $(x_0; y_0)$ particular.

Si $n = 3$, realizamos un razonamiento similar y se definen:

$$D_{\bar{i}} f(x_0; y_0; z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h; y_0; z_0) - f(x_0; y_0; z_0)}{h} = f_x(x_0; y_0; z_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0; z_0)$$

$$D_{\bar{j}} f(x_0; y_0; z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + h; z_0) - f(x_0; y_0; z_0)}{h} = f_y(x_0; y_0; z_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0; z_0)$$

$$D_{\bar{k}} f(x_0; y_0; z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0; z_0 + h) - f(x_0; y_0; z_0)}{h} = f_z(x_0; y_0; z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(x_0; y_0; z_0)$$

Hemos visto en los ejemplos 14 y 15 dos casos en los que hemos calculado derivadas parciales de un campo escalar, y hasta el momento la única manera de hacerlo es por definición, es decir a través del uso de un límite. Sin embargo, existe otra forma más simple de calcular derivadas parciales sin el uso de la definición, recurriendo al uso de técnicas de derivación ya conocidas para funciones escalares. En el siguiente ejemplo se muestra cómo podemos calcular derivadas parciales mediante esta vía:

Ejemplo:

16) Consideremos el mismo campo escalar de ecuación $f(x; y) = 2x + x^2y$ que estudiamos en el ejemplo 15.

Habíamos arribado a que $f_x(x; y) = 2 + 2xy$ y $f_y(x; y) = x^2$.

Si queremos calcular la primera derivada parcial (respecto de la variable x) podemos imaginar que el resto de las variables independientes (en este caso solo la y) son una constante, y “convertir” el campo en una función de una sola variable. Así:

$$f(x; k) = 2x + x^2k = g(x)$$

Recurriendo a las técnicas de derivación conocidas para funciones escalares, resulta que $g'(x) = 2 + 2xk$.

Luego, como originalmente $k = y$, nos queda $f_x(x; y) = 2 + 2xy$, arribando al mismo resultado que haciéndolo por definición.

De manera análoga: $f_y(x; y) = x^2$

Actividad 10. Para los siguientes campos, calcular todas las derivadas parciales posibles de acuerdo con la cantidad de variables para las cuales esté definido el campo:

a) $F(x; y) = x^2 \cdot y + e^{xy^2}$

b) $F(x; y) = xy^2 + x^y$

c) $F(x; y) = \ln(xy) + 2^{x+y}$

d) $F(x; y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

e) $u(x; y; z) = e^{-x} \cdot \cos\left(\frac{y}{z}\right)$

f) $F(x; y; z) = \frac{x}{y} + \sqrt{2z} + 4y$

g) $f(x; y) = \frac{x}{y} + 2y^2x^2 - e^{xy}$

h) $F(x; y; z; t) = xy + zt - \cos(xyz)$

3.3.3. Operador Nabla y vector gradiente de un campo escalar

Llamamos *operador Nabla* y lo simbolizamos ∇ , al vector que está formado por los operadores que producen la derivación parcial de primer orden:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

El operador Nabla adquiere mayor sentido de interpretación cuando se multiplica con un campo (sea escalar o vectorial) mediante los productos definidos para vectores. Como un campo escalar es en esencia un número real, podemos hacer el producto entre ∇ y un campo f , obteniendo como resultado lo que se define a continuación:

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \bar{r} = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in A \mapsto f(\bar{r}) \in \mathbb{R}$ un campo escalar, llamamos *gradiente* de f en el punto genérico \bar{r} , al producto entre el operador Nabla y el campo f es decir:

$$\text{grad}[f(\bar{r})] = \nabla \cdot f(\bar{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot f(\bar{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\bar{r}); \frac{\partial}{\partial x_2} f(\bar{r}); \dots; \frac{\partial}{\partial x_n} f(\bar{r}) \right)$$

Es decir, el vector gradiente de un campo escalar es *el vector formado por las derivadas parciales del campo escalar*. En particular, si:

- $f = f(x; y)$, entonces $\text{grad}(f(x; y)) = (f_x(x; y); f_y(x; y)); y$
- $f = f(x; y; z)$, entonces $\text{grad}(f(x; y; z)) = (f_x(x; y; z); f_y(x; y; z); f_z(x; y; z))$

Ejemplo:

17) Sea el campo escalar de ecuación $f(x; y) = 2x + x^2y$, será:

$\nabla f(x; y) = (2 + 2xy; x^2)$, y en particular, por ejemplo $\nabla f(1; 0) = (2; 1)$

Actividad 11. Calcular el vector gradiente para cada uno de los campos escalares cuyas leyes se muestran a continuación, y en particular en el punto pedido:

a) $f(x, y) = e^x \cdot \cos(x) \cdot \sin(y)$ en $\bar{r}_0 = (\frac{\pi}{4}, \pi)$

b) $u = x^2 + \sin(yz)$ en $\bar{r}_0 = (1, 2, 0)$

Propiedades de vector gradiente

Sean $\nabla f(\bar{r}_0)$ y $\nabla g(\bar{r}_0)$ los vectores gradientes de dos campos escalares f y g en un punto \bar{r}_0 , entonces:

- $\nabla(f + g)(\bar{r}_0) = \nabla f(\bar{r}_0) + \nabla g(\bar{r}_0)$
- $\nabla(\alpha f)(\bar{r}_0) = \alpha \cdot \nabla f(\bar{r}_0)$
- $\nabla(f \cdot g)(\bar{r}_0) = \nabla f(\bar{r}_0) \cdot g(\bar{r}_0) + f(\bar{r}_0) \cdot \nabla g(\bar{r}_0)$

3.3.4. Derivadas parciales sucesivas

Dado un campo escalar de dos o más variables, cuando hallamos sus derivadas parciales estamos obteniendo nuevos campos escalares. Éstos, a su vez pueden admitir nuevas derivadas parciales respecto de todas las variables independientes que se definen de la misma manera que las anteriores y así sucesivamente, generando lo que denominamos derivadas parciales sucesivas.

Derivadas parciales de un campo de dos variables

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\bar{r} = (x_0; y_0)$ un punto interior del conjunto A pudimos obtener las derivadas parciales $f_x(x_0; y_0)$ y $f_y(x_0; y_0)$.

Ahora serán:

$$(f_x)_x(x_0; y_0) = f_{xx}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0+h; y_0) - f_x(x_0; y_0)}{h}$$

$$(f_x)_y(x_0; y_0) = f_{xy}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0; y_0) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0; y_0+h) - f_x(x_0; y_0)}{h}$$

$$(f_y)_x(x_0; y_0) = f_{yx}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0+h; y_0) - f_y(x_0; y_0)}{h}$$

$$(f_y)_y(x_0; y_0) = f_{yy}(x_0; y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0; y_0) \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0; y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0; y_0+h) - f_y(x_0; y_0)}{h}$$

Continuando el esquema de derivación, podríamos hallar las derivadas parciales sucesivas $f_{xxx}(x_0; y_0)$, $f_{xxy}(x_0; y_0)$, etc.

Ejemplo:

18) Sea el campo escalar de ecuación $f(x; y) = e^{xy} + \frac{x}{y} + 3x^3$, serán:

$$f_x(x; y) = ye^{xy} + \frac{1}{y} + 9x^2$$

$$f_y(x; y) = xe^{xy} - \frac{x}{y^2}$$

$$f_{xx}(x; y) = y^2e^{xy} + 18x$$

$$f_{xy}(x; y) = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{y^2}$$

$$f_{yx}(x; y) = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{y^2}$$

$$f_{yy}(x; y) = x^2e^{xy} + \frac{2x}{y^3}$$

Actividad 12. Hallar las leyes derivadas parciales de segundo orden para los siguientes campos:

a) $f(x; y) = x^2 \cdot y + 2y^3e^x$

b) $f(x; y) = 2 + x^2y^3 + \ln(x)$

Teorema de Schwarz

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con derivadas parciales f_x , f_y y f_{xy} continuas en al menos un entorno de centro $\bar{r}_0 = (x_0; y_0) \in A_i$, entonces existe $f_{yx}(x_0; y_0)$ y vale:

$$f_{yx}(x_0; y_0) = f_{xy}(x_0; y_0)$$

Actividad 13. Dado un campo escalar de dos variables $f = f(x; y)$, llamamos *matriz hessiana*, a la matriz cuadrada de orden dos cuyos elementos están dispuestos de la siguiente manera:

$$H(x; y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x; y) & f_{xy}(x; y) \\ f_{yx}(x; y) & f_{yy}(x; y) \end{pmatrix}$$

Construir la matriz hessiana de los siguientes campos escalares:

a) $f(x; y) = x^2y^4 + x^3y - 2$

b) $f(x; y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

3.4. DERIVADA DE UN CAMPO VECTORIAL

Dada un campo vectorial $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, \bar{r}_0 un punto interior de A , y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario (versor), diremos que \bar{f} es derivable en \bar{r}_0 si y solo si existe el vector $D_{\bar{a}}\bar{f}(\bar{r}_0)$ que calcularemos:

$$D_{\bar{a}}\bar{f}(\bar{r}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(\bar{r}_0 + h \cdot \bar{a}) - \bar{f}(\bar{r}_0)}{h} \text{ con } h \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y en tal caso se llamará derivada direccional de \vec{f} calculada en \vec{r}_0 , en dirección y sentido del versor \vec{a} .

3.4.1. Relación entre la derivada de un campo vectorial y la de sus componentes

Supongamos que se quiere calcular la derivada según dirección y sentido del versor \vec{a} del campo vectorial cuya ley es:

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}) = (f_1(\vec{r}); f_2(\vec{r}); \dots; f_m(\vec{r}))$$

Las funciones componentes del campo vectorial $\vec{f}(\vec{r})$ son campos escalares: $f_1(\vec{r})$, $f_2(\vec{r})$, ..., $f_m(\vec{r})$.

Para que exista la derivada $D_{\vec{a}}\vec{f}(\vec{r}_0)$ basta con que existan las derivadas:

$$D_{\vec{a}}f_1(\vec{r}_0), D_{\vec{a}}f_2(\vec{r}_0), \dots, D_{\vec{a}}f_m(\vec{r}_0)$$

y vale $D_{\vec{a}}\vec{f}(\vec{r}_0) = (D_{\vec{a}}f_1(\vec{r}_0); D_{\vec{a}}f_2(\vec{r}_0); \dots; D_{\vec{a}}f_m(\vec{r}_0))$.

Ejemplo:

19) La derivada parcial primera del campo de ley $\vec{f}(x; y) = (x^3y; x + 2y; 3 + e^x)$ es $\vec{f}_x(x; y) = (3x^2y; 1; e^x)$

Actividad 14. Calcular las derivadas parciales de primer orden de los campos vectoriales cuyas leyes se indican a continuación:

a) $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 - y + z)\vec{i} + (2y - 3z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$

b) $\vec{f}(x; y) = e^{x^2}\vec{i} + (x - y)\vec{j} + \ln y\vec{k}$

c) $\vec{f}(x; y; z) = \frac{x}{y+z}\vec{i} + (2x + z^2y)\vec{j}$

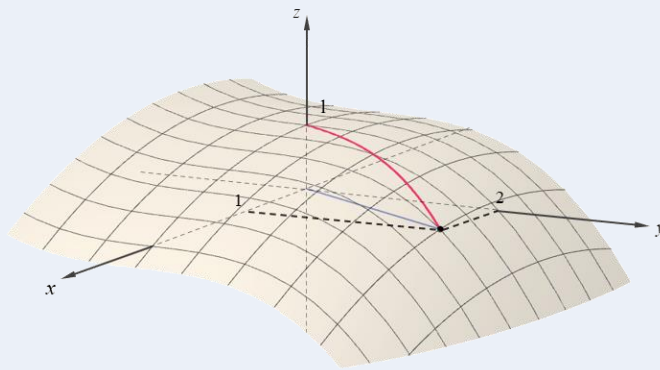
REVISIÓN FINAL DE LA UNIDAD

1) Se tienen los campos escalares cuyas leyes son:

$$f(x; y) = x^3y^4 - 3x^2y + \ln(xy^2) \quad \text{y} \quad g(x; y; z) = \frac{2x+x^2+3y}{x-y} + \frac{x}{z}$$

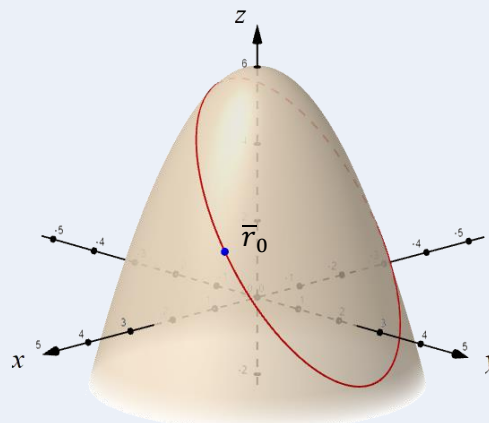
Hallar sus derivadas parciales.

2) Se tiene la superficie de ecuación $z = -\frac{1}{9}(x^2 + y^3) + 1$. Una partícula se encuentra ubicada en el punto $P(1; 2; 0)$ y se comienza a desplazar por la trayectoria marcada con color fucsia hacia el punto $Q(0; 0; 1)$.



- a) Hallar la ecuación de la trayectoria.
 b) Determinar el ángulo con el que comienza a desplazarse la partícula utilizando:
 i) derivada de una función vectorial. ii) derivada de un campo escalar.

3) Se tiene la superficie de ecuación $z = 6 - x^2 - y^2$ y una curva C contenida en ella, de parametrización $\vec{r}(t) = [\sqrt{3} \cos(t)]\vec{i} + [1 + \sqrt{3}\text{sen}(t)]\vec{j} + [2 - 2\sqrt{3}\text{sen}(t)]\vec{k}$. Ambas contienen al punto $\vec{r}_0 = (\sqrt{3}; 1; 2)$.



- a) Hallar las componentes de un vector tangente a C en \vec{r}_0 .
 b) Consideremos que la superficie dada, es una superficie de nivel de otro campo escalar cuya ley es $F = F(x; y; z)$.
 i) Construir la ley $F = F(x; y; z)$. ii) Hallar $\nabla F(\vec{r}_0)$
 c) ¿Qué posición tienen los vectores obtenidos en a) y b)?

4) Dado la curva C de parametrización $\vec{r}(t) = \ln(t)\vec{i} + \sqrt{2}t\vec{j} + \frac{1}{2}t^2\vec{k}$, tal que $1 \leq t \leq e$, se pide encontrar la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(\ln(2); 2\sqrt{2}; 2)$

5) Dado el campo escalar de ley $f(x; y) = 3x + y^2$, calcular por definición, el valor de la derivada direccional de f en el punto $(1; 0)$ según la dirección y sentido del vector $\vec{u} \rightarrow (-4; 3)$.

6) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

a) La segunda derivada parcial (f_{yy}) del campo escalar de ley $f(x; y) = x^2y + e^{2x}y$ es siempre no negativa para todo $(x; y)$.

b) Dada la función vectorial de ley $\vec{r}(t) = (\cos(t); \sin(t))$, existe algún valor de t para el cual el vector $\vec{r}(t)$ tiene dirección vertical.

A continuación, podés encontrar algunas las soluciones de las actividades de revisión:

Ejercicio 1



Ejercicio 2



Ejercicio 3



Ejercicio 4



(A partir de 4.31)

- Actividad 1) a) \emptyset b) \mathbb{R} c) $]3; +\infty[$ d) $] - 1; 3[$
 e) E f) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \wedge y \neq x\}$

Actividad 2) a) $f'(x) = 3x^2 \cdot \text{sen}(x) + x^3 \cdot \text{cos}(x)$

b) $g'(x) = \frac{1}{2(x-2)\sqrt{\ln(x-2)}}$

c) $h'(x) = \frac{-tg(x) - 3 \sec^2(x) + x \sec^2(x)}{tg^2(x)}$

d) $f'(x) = \frac{[3x^2 \cdot 2^x + \ln(2)x^3 \cdot 2^x] \cos(\sqrt{x^3 \cdot 2^x})}{2\sqrt{x^3 \cdot 2^x}}$

Actividad 3) $y = x - 1$

Actividad 4) a) $\vec{r}'(t) = (4t + 15t^2 + 1; -\text{sen} t - \text{cos} t)$

b) $\vec{r}'(t) = (2t - e^t; \frac{1}{t})$

c) $\vec{f}(t) = (\frac{-2-8t-8t^2}{(4t^2-1)^2}; \frac{\text{cos}(\ln(t))}{t})$

Actividad 5) a) $\vec{r}'(\frac{\pi}{2}) = (-2; 0)$ b) $\vec{r}'(1) = (1; -2)$

Actividad 6) b) $\vec{r}'(t) = (1; 2t - 4)$ c) $\vec{r}'(3) = (1; 2)$ d) $t = 2$

Actividad 7) a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

Actividad 8) a) -2 b) 21 c) 0 d) $-\frac{62}{\sqrt{13}}$

Actividad 9) Conviene $\vec{m} \rightarrow (-3; -1)$ (por cuatro grados aproximadamente)

Actividad 10) a) $F_x(x; y) = 2xy + y^2 e^{xy^2}$ $F_y(x; y) = x^2 + 2xy e^{xy^2}$

b) $F_x(x; y) = y^2 + yx^{y-1}$ $F_y(x; y) = 2xy + x^y \cdot \ln(x)$

c) $F_x(x; y) = \frac{1}{x} + \ln(2) \cdot 2^{x+y}$ $F_y(x; y) = y + \ln(2) \cdot 2^{x+y}$

d) $F_x(x; y) = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ $F_y(x; y) = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

e) $u_x(x; y; z) = -e^{-x} \cos(\frac{y}{z})$ $u_y(x; y; z) = -\frac{e^{-x}}{z} \text{sen}(\frac{y}{z})$

$$u_z(x; y; z) = \frac{ye^{-x}}{z^2} \operatorname{sen}\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$f) F_x(x; y; z) = \frac{1}{y}$$

$$F_y(x; y; z) = -\frac{x}{y^2} + 4$$

$$F_z(x; y; z) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}}$$

$$g) f_x(x; y) = \frac{1}{y} + 4y^2x - ye^{xy}$$

$$f_y(x; y) = -\frac{x}{y^2} + 4yx^2 - xe^{xy}$$

$$h) F_x(x; y; z; t) = y + yz\operatorname{sen}(xyz)$$

$$F_y(x; y; z; t) = x + xz\operatorname{sen}(xyz)$$

$$F_z(x; y; z; t) = t + xy\operatorname{sen}(xyz)$$

$$F_t(x; y; z; t) = z$$

Actividad 11) a) $\nabla f\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right) = \left(0; -e^{\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\nabla u(1; 2; 0) = (2; 0; 2)$

Actividad 12) a) $f_{xx}(x; y) = 2y + 2y^3e^x$

$$f_{xy}(x; y) = 2x + 6y^2e^x$$

$$f_{yy}(x; y) = 12ye^x$$

$$f_{yx}(x; y) = 2x + 6y^2e^x$$

b) $f_{xx}(x; y) = 2y^3 - \frac{1}{x^2}$

$$f_{xy}(x; y) = 6xy^2$$

$$f_{yy}(x; y) = 6x^2y$$

$$f_{yx}(x; y) = 6xy^2$$

Actividad 13) a) $H(x; y) = \begin{pmatrix} 2y^4 + 6xy & 8xy^3 + 3x^2 \\ 8xy^3 + 3x^2 & 12x^2y^2 \end{pmatrix}$

b) $H(x; y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

Actividad 14) a) $\overline{f}_x(x, y, z) = (2x; 0; 1)$ $\overline{f}_y(x, y, z) = (-1; 2; 0)$ $\overline{f}_z(x, y, z) = (1; -3; 1)$

b) $\overline{f}_x(x, y) = (2xe^{x^2}; 1; 0)$ $\overline{f}_y(x, y) = (0; -1; \frac{1}{y})$

5. Diferenciales

1. INTRODUCCIÓN

Como hemos estudiado anteriormente, la derivabilidad de una función escalar en un punto implica la continuidad de la misma en él. Para las funciones de más variables (campos escalares) la derivabilidad no asegura la continuidad, como podemos apreciar en el siguiente ejemplo:

Supongamos tener el campo escalar de dos variables cuya ley está dada por:

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{-x^2 y}{2x^4 + 4y^2} & \bar{r} \neq \bar{0} \\ 0 & \bar{r} = \bar{0} \end{cases}$$

Analicemos su continuidad y su derivabilidad en el punto $(0; 0)$.

Por un lado, acercándonos al punto $(0; 0)$ por parábolas de ecuaciones $y = k \cdot x^2$ observamos que $f(x; k \cdot x^2) = \frac{-x^2 \cdot kx^2}{2x^4 + 4(kx^2)^2} = \frac{-k \cdot x^4}{2x^4 + 4k^2 x^4} = \frac{-k \cdot x^4}{x^4 \cdot (2 + 4k^2)} = \frac{-k}{2 + 4k^2}$ con $x \neq 0$.

El límite $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{-x^2 y}{2x^4 + 4y^2}$ no existe pues $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-k}{2 + 4k^2} = \frac{-k}{2 + 4k^2}$. Luego, f no es continua en $(0; 0)$.

Por otro lado, consideremos un versor $\bar{a} \rightarrow (a_1; a_2)$ y verifiquemos si existe la derivada direccional de f en el punto $(0; 0)$.

$$D_{\vec{a}}f(0;0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+a_1.h;0+a_2.h)-f(0;0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-(a_1.h)^2 \cdot (a_2.h)}{2 \cdot (a_1.h)^4 + 4 \cdot (a_2.h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a_1^2 \cdot a_2 \cdot h^3}{2 \cdot a_1^4 \cdot h^5 + 4 \cdot a_2^2 \cdot h^3} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a_1^2 \cdot a_2 \cdot h^3}{h^3 \cdot (2 \cdot a_1^4 \cdot h^2 + 4 \cdot a_2^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-a_1^2 \cdot a_2}{2 \cdot a_1^4 \cdot h^2 + 4 \cdot a_2^2} = \frac{-a_1^2 \cdot a_2}{4 \cdot a_2^2} = \frac{-a_1^2}{4 \cdot a_2} \text{ solo si } a_2 \neq 0.$$

¿Qué sucede entonces para el caso en que $a_2 = 0$? Los dos versores que utilizaremos para esta dirección son los vectores $\vec{i} \rightarrow (1; 0)$ y $-\vec{i} \rightarrow (-1; 0)$. La derivada es:

$$D_{\vec{i}}f(0;0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h;0)-f(0;0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{2 \cdot h^4} - 0}{h} = 0 \quad (\text{idem para } -\vec{i})$$

Con lo cual, la derivada direccional de f en el punto $(0; 0)$ existe en toda dirección y sentido de \vec{a} y vale:

$$D_{\vec{a}}f(0;0) = \begin{cases} \frac{-a_1^2}{4 \cdot a_2} & \vec{a} = (a_1; a_2) \neq \pm \vec{i} \\ 0 & \vec{a} = \pm \vec{i} \end{cases}$$

Este ejemplo, demuestra que un campo escalar de dos variables puede ser derivable en un punto y sin embargo, no ser continuo en él, a diferencia de lo que ocurre para las funciones escalares.

Por eso, suele decirse que la derivabilidad es *más débil* en los campos escalares que en las funciones escalares, y es necesario entonces recurrir a un concepto *más fuerte*: el de diferenciabilidad.

Si bien la diferenciabilidad es una característica que se da en cualquier tipo de función, debido a su utilidad práctica, solo la estudiaremos para aquellas con conjunto imagen en los reales: las funciones y los campos escalares.

2. DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES ESCALARES

Una función escalar $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un x_0 , punto interior de su dominio, si y solo si existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que la diferencia $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ pueda escribirse $\Delta f = m \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ con $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, siendo $\Delta x = x - x_0$

Como $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, la segunda igualdad puede interpretarse como lo siguiente: una función es diferenciable en el punto x_0 si y solo si la diferencia de imágenes $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ es bastante similar al número $m \cdot \Delta x = m \cdot (x - x_0)$, cuando consideramos un x lo suficientemente cerca de x_0 . Es decir, sin importar qué *tipo de función* escalar sea f , estamos aproximando su valor al de una función afín (o lineal).

Ejemplo:

1) La función de ley $f(x) = x^2$ es diferenciable en $x_0 = 1$. En efecto, si planteamos la diferencia $f(x) - f(1)$ resulta:

$$f(x) - f(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1 = 1 + 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 1 = 2 \cdot \Delta x + (\Delta x) \cdot \Delta x$$

Notemos que tomando $\varepsilon = \Delta x$ que efectivamente tiende a 0 cuando $\Delta x \rightarrow 0$, hemos podido expresar a $f(x) - f(1)$ como $m \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ (con $m = 2$).

2.1. DIFERENCIABILIDAD, DERIVABILIDAD y CONTINUIDAD DE UNA F.E.

No demostraremos ninguna de las siguientes afirmaciones, porque ya han sido estudiadas en Cálculo, pero recordemos que se da la siguiente relación entre estas tres características para una función escalar:

Derivabilidad y diferenciable son equivalentes:

$$f \text{ diferenciable en } x_0 \Leftrightarrow f \text{ derivable en } x_0$$

La continuidad es una condición necesaria (pero no suficiente) para la derivabilidad:

$$f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0$$

Cuando se demuestra que, si una función es diferenciable en un punto, también es derivable en él, se llega a la conclusión que el valor m del que habla la definición es $f'(x_0)$ y esto puede comprobarse en el ejemplo 1. A partir de esto, podemos redefinir diferenciable de la siguiente manera:

Una función escalar $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un x_0 , punto interior de su dominio, si y solo si puede escribirse:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \text{ con } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } \Delta x \rightarrow 0.$$

2.2. DIFERENCIAL

El primer término de la suma $f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$ es la *parte principal* de dicha expresión y recibe el nombre de *diferencial de f en x_0* , es decir:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Decimos que es la parte principal, en el sentido en que es lo más parecido a Δf .

Analizamos ahora el valor df , es decir, el diferencial de la variable dependiente. Por lo visto anteriormente, podemos generalizar estableciendo que $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$. Así

Considerando el triángulo PQR , la pendiente de la recta f_t puede escribirse:

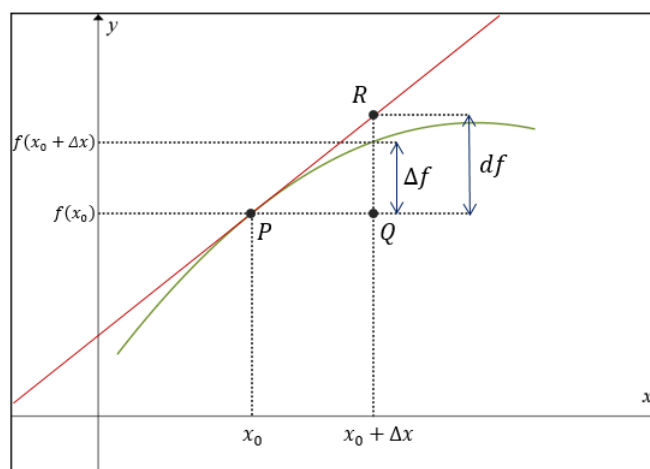
$$tg(RPQ) = \frac{long(\overline{QR})}{\Delta x}$$

De donde $long(\overline{QR}) = tg(RPQ) \cdot \Delta x$. Pero la $tg(RPQ)$ es la derivada de la función f en el punto x_0 . Entonces:

$$long(\overline{QR}) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Y como previamente habíamos definido $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, resulta entonces:

$$df(x_0) = long(\overline{QR})$$



En resumen, el diferencial de una función en un punto representa el incremento de imágenes que hay por la recta tangente en x_0 , al movernos de x_0 a $x_0 + \Delta x$ como se muestra en la figura.

Lo interesante de establecer un criterio gráfico es concluir que una función escalar f es diferenciable en un x_0 si existe una recta tangente a la gráfica de f en $(x_0; f(x_0))$ y es una *buena aproximación* de dicha curva, lo suficientemente cerca de $(x_0; f(x_0))$.

3. DIFERENCIABILIDAD DE CAMPOS ESCALARES

Nota: La notación “ \cdot ” representa el producto escalar entre dos vectores, mientras que “ \cdot ”, el producto de reales.

Un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un \bar{r}_0 punto interior de su dominio si existe un $\bar{m} \in \mathbb{R}^n$ tal que la diferencia $\Delta f = f(\bar{r}) - f(\bar{r}_0)$ pueda escribirse:

$$\Delta f = \bar{m} \cdot \Delta \bar{r} + \varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}| \text{ con } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } |\Delta \bar{r}| \rightarrow 0, \text{ siendo } \Delta \bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0$$

Cuando la función es de *dos variables*, razonando de forma similar a lo expuesto para funciones escalares, podemos pensar que un campo escalar es diferenciable en un punto, si es posible encontrar un *ente geométrico de ecuación lineal* que sea una buena aproximación de él en dicho punto. Para el caso de dos variables será: un plano.

Ejemplo:

2) El campo escalar de ley $f(x; y) = 4x + y^2$ es diferenciable en $(x_0; y_0) = (1; 3)$. En efecto, si planteamos la diferencia $f(x; y) - f(1; 3)$ resulta:

$$f(x; y) - f(1; 3) = f(1 + \Delta x; 3 + \Delta y) - f(1; 3) = 4 \cdot (1 + \Delta x) + (3 + \Delta y)^2 - 13 = 4\Delta x + 6\Delta y + (\Delta y)^2$$

$$f(x; y) - f(1; 3) = \Delta x + 6\Delta y + \underbrace{\frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}_{\varepsilon} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Hemos encontrado $\bar{m} = (4; 6)$. Ahora, consideremos ε a la expresión señalada, de modo que el tercer término del segundo miembro es $\varepsilon \cdot |\Delta \vec{r}|$.

Si podemos probar que $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$ (es decir cuando $(\Delta x; \Delta y) \rightarrow (0; 0)$) entonces estamos probando que el campo es diferenciable en el punto $(x_0; y_0) = (1; 3)$.

Notemos que $\varepsilon = \frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ puede escribirse $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \cdot \Delta y$

Como el valor $\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ varía entre -1 y 1 (¿por qué?), entonces:

$$-\Delta y \leq \varepsilon = \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \cdot \Delta y \leq \Delta y$$

Es decir, $-\Delta y \leq \varepsilon \leq \Delta y$. Aplicando límite en los tres miembros, por el teorema del emparedado queda probado que $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0$.

Realizar el trabajo anterior no siempre resulta sencillo para las formas más complicadas de la ley de un campo escalar, por lo cual, utilizaremos métodos más simples.

3.1. DIFERENCIABILIDAD, DERIVABILIDAD y CONTINUIDAD DE UN C.E.

Condiciones necesarias de diferenciability

A diferencia de lo que ocurre con las funciones escalares, y como vimos en el ejemplo de la introducción, existen campos escalares que son derivables, pero no continuos en un punto.

Con lo cual, la diferenciability constituye una herramienta de análisis muy importante en cuanto se dan las siguientes dos situaciones:

Sea un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un \vec{r}_0 punto interior de su dominio, entonces f es continuo en \vec{r}_0

Demostración:

f diferenciable en $\bar{r}_0 \Rightarrow \Delta f = \bar{m} \cdot \Delta \bar{r} + \varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}|$, con $\varepsilon \rightarrow 0$ si $|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} [f(\bar{r}) - f(\bar{r}_0)] = \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} [\bar{m} \cdot \Delta \bar{r} + \varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}|] = \bar{m} \cdot \bar{0} + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} [f(\bar{r}) - f(\bar{r}_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} [f(\bar{r}) - f(\bar{r}_0)] = 0 \Rightarrow \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} f(\bar{r}) - \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} f(\bar{r}_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} f(\bar{r}) = \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} f(\bar{r}_0) \Rightarrow \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} f(\bar{r}) = f(\bar{r}_0) \Rightarrow f \text{ continuo en } \bar{r}_0$$

Sea un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un \bar{r}_0 punto interior de su dominio, entonces f es derivable en \bar{r}_0 , y resulta $D_{\bar{a}}f(\bar{r}_0) = \nabla f(\bar{r}_0) \cdot \bar{a}$.

Demostración, parte 1:

f diferenciable en $\bar{r}_0 \Rightarrow \Delta f = \bar{m} \cdot \Delta \bar{r} + \varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}|$, con $\varepsilon \rightarrow 0$ si $|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_{\bar{a}}f(\bar{r}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{m} \cdot \Delta \bar{r} + \varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{m} \cdot \Delta \bar{r}}{h} + \frac{\varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{m} \cdot \bar{a} \cdot h}{h} + \frac{\varepsilon \cdot |h|}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\bar{m} \cdot \bar{a}) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot |h|}{h} = \bar{m} \cdot \bar{a} + 0 = \bar{m} \cdot \bar{a}$$

* Como estamos intentando calcular la derivada en el punto \bar{r}_0 , entonces incrementamos desde allí, para obtener \bar{r} . Es decir $\bar{r}_0 + \bar{a} \cdot h = \bar{r}$, de donde $\Delta \bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{a} \cdot h$, y como \bar{a} es un vector unitario, entonces $|\Delta \bar{r}| = |\bar{a}| \cdot |h| = |h|$.

*' El límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot |h|}{h}$ vale 0, pues $\lim_{h \rightarrow 0^-} (-\varepsilon) = 0$ y $\lim_{h \rightarrow 0^+} \varepsilon = 0$

Luego, existe la $D_{\bar{a}}f(\bar{r}_0)$ y vale $\bar{m} \cdot \bar{a}$.

Demostración, parte 2:

Ahora bien, si existe la derivada direccional de f en \bar{r}_0 , debe existir en toda dirección, incluyendo las de los versores.

Si en particular tomamos el versor de primera componente 1, y el resto todas nulas, obtenemos:

$$D_{\bar{x}_1}f(\bar{r}_0) = \bar{m} \cdot \bar{x}_1 = (m_1; m_2; \dots; m_n) \cdot (1; 0; \dots; 0) = m_1. \text{ Es decir, } m_1 = D_{\bar{x}_1}f(\bar{r}_0)$$

De igual manera, tomando el segundo versor:

$$D_{\bar{x}_2}f(\bar{r}_0) = \bar{m} \cdot \bar{x}_2 = (m_1; m_2; \dots; m_n) \cdot (0; 1; \dots; 0) = m_2. \text{ Es decir, } m_2 = D_{\bar{x}_2}f(\bar{r}_0)$$

Si repetimos el proceso hasta el versor de n componentes, obtendremos que

$$m_3 = D_{\bar{x}_3} f(\bar{r}_0), \dots, m_n = D_{\bar{x}_n} f(\bar{r}_0).$$

$$\text{Luego, } \bar{m} = (D_{\bar{x}_1} f(\bar{r}_0); D_{\bar{x}_2} f(\bar{r}_0); \dots; D_{\bar{x}_n} f(\bar{r}_0)) = \nabla f(\bar{r}_0)$$

Finalmente, la derivada $D_{\bar{a}} f(\bar{r}_0)$ es:

$$D_{\bar{a}} f(\bar{r}_0) = \nabla f(\bar{r}_0) \cdot \bar{a}$$

¡Dato no menor considerando que podemos abandonar el cálculo por definición y utilizar esta fórmula que se reduce a un simple producto escalar!

Ejemplo:

3) En el ejemplo 13 del capítulo 3, habíamos buscado la derivada del campo escalar de ley $f(x; y) = 1 + x + 2y + xy$ en el punto $(1; 0)$ según la dirección que une los puntos $A(2; 5)$ con $B(6; 2)$, en ese sentido llegando a la conclusión que el valor buscado era -1 .

Llegaremos al mismo resultado, ahora aplicando la fórmula que se dedujo anteriormente. Si $f(x; y) = 1 + x + 2y + xy$ entonces $\nabla f(x; y) = (1 + y; 2 + x)$. Luego $\nabla f(1; 0) = (1; 3)$. La dirección y sentido está dada por $\bar{a} \rightarrow (4/5; -3/5)$. Entonces será:

$$D_{\bar{a}} f(1; 0) = \nabla f(1; 0) \cdot \bar{a} = (1; 3) \cdot \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right) = -1$$

Y queda verificado lo que queríamos comprobar.

Actividad 1. Hallar el valor de la derivada de cada campo, en el punto, dirección y sentido indicados. Luego, comparar los resultados con los obtenidos en la Actividad 8, Unidad 3.

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------|---|
| a) $f(x; y) = x^2 + y$ | $(x_0; y_0) = (1; 2)$ | dirección del versor $-\bar{i}$ |
| b) $f(x; y) = y \cdot x^3 + 4$ | $(x_0; y_0) = (1; 7)$ | dirección del versor \bar{i} |
| c) $f(x; y) = x - y + xy$ | $(x_0; y_0) = (1; 1)$ | dirección del vector $\bar{u} \rightarrow (12; -5)$ |
| d) $f(x; y) = 4xy + x^2$ | $(x_0; y_0) = (1; 4)$ | dirección desde $P(1; 3)$ a $Q(-2; 1)$ |

Actividad 2. Calcular la derivada direccional de la función de ley $f(x, y) = x^2 y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección y sentido del vector $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$.

Actividad 3. Calcular la derivada direccional $D_{\bar{u}} f(1, 2)$ si $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y \bar{u} es:

- a) el vector unitario que forma con el eje x el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- b) el vector que orienta el crecimiento de la recta de ecuación $\begin{cases} x = 1 + 9\alpha \\ y = -2 + 12\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Variación de la derivada direccional

Por definición de producto escalar: $D_{\vec{a}}f(\vec{r}_0) = \nabla f(\vec{r}_0) \cdot \vec{a} = |\nabla f(\vec{r}_0)| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\nabla f(\vec{r}_0); \vec{a})$.
 Como además, $|\vec{a}| = 1$ y $-1 \leq \cos(\nabla f(\vec{r}_0); \vec{a}) \leq 1$, es fácil deducir que el valor máximo que puede tomar la derivada direccional en un punto se da cuando $\cos(\nabla f(\vec{r}_0); \vec{a}) = 1$, es decir cuando $\nabla f(\vec{r}_0)$ y \vec{a} tienen la misma dirección y sentido, y su valor será $D_{\vec{a}}f(\vec{r}_0) = |\nabla f(\vec{r}_0)|$.

Con el mismo razonamiento, el menor valor posible para $D_{\vec{a}}f(\vec{r}_0)$ es $-|\nabla f(\vec{r}_0)|$ y se da cuando $\nabla f(\vec{r}_0)$ y \vec{a} tienen la misma dirección, pero sentido opuesto.

Lo anterior, nos permite resolver problemas que nos pidan buscar el valor máximo (o mínimo) que puede tomar la derivada direccional de un campo en un punto.

Ejemplo:

4) Sea el campo escalar de ley $f(x; y) = 2x^2 + 5xy - 3x$ evaluemos el valor de la derivada direccional en el punto $P(1; -2)$ según las siguientes direcciones y sentidos:

a) la del versor \vec{i} .

b) la del versor $\vec{a} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) la del vector $\vec{b} \rightarrow (5; 12)$.

d) la del vector \vec{PQ} si $Q(4; 2)$.

e) la del vector que forma un ángulo de 60° con el versor \vec{i} .

f) la del vector $\vec{c} \rightarrow (-18; 10)$.

Por empezar, como aplicaremos la forma de cálculo $D_{\vec{a}}f(\vec{r}_0) = \nabla f(\vec{r}_0) \cdot \vec{a}$, primero calcularemos el vector gradiente en el punto $P(1; -2)$ que utilizaremos en todas las resoluciones:

$$\nabla f(x; y) = (4x + 5y - 3; 5x) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1; -2) = (-9; 5)$$

a) Consideremos $\vec{a} = \vec{i} \rightarrow (1; 0)$. Luego, $D_{\vec{a}}f(1; -2) = (-9; 5) \cdot (1; 0) = -9$

b) Para el segundo caso, será $D_{\vec{a}}f(1; -2) = (-9; 5) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -7\sqrt{2} \approx -9,89$

c) Primero buscamos el versor asociado a $\vec{b} \rightarrow (5; 12)$. Como $|\vec{b}| = 13$, entonces usaremos el versor $\vec{a} \rightarrow \left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$.

$$\text{Entonces } D_{\vec{a}}f(1; -2) = (-9; 5) \cdot \left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{15}{13} \approx 1,15$$

d) $\vec{PQ} \rightarrow (3; 4)$, entonces $\vec{a} \rightarrow \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ y luego:

$$D_{\vec{a}}f(1; -2) = (-9; 5) \cdot \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{5} = -1,4$$

e) $\vec{a} \rightarrow \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, luego $D_{\vec{a}}f(1; -2) = (-9; 5) \cdot \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}-9}{2} \approx -0.16$

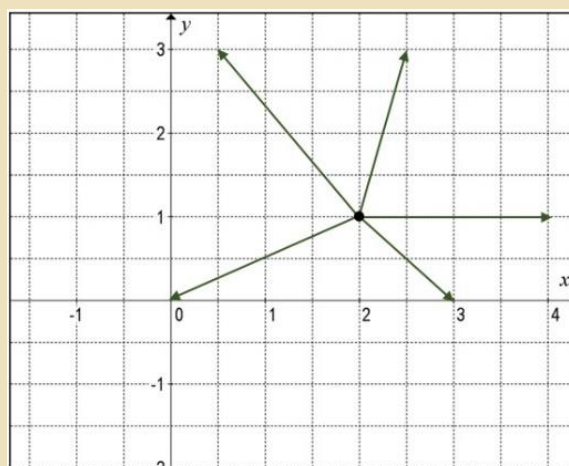
f) Si $\vec{c} \rightarrow (-18; 10)$, entonces $\vec{a} \rightarrow \left(\frac{-18}{\sqrt{424}}; \frac{10}{\sqrt{424}}\right)$ y $D_{\vec{a}}f(1; -2) = \sqrt{106} \approx 10,29$

Las aproximaciones en los valores obtenidos se hicieron con el propósito de mostrar que, de todas las direcciones y sentidos, aparentemente el valor obtenido con el último vector es el máximo. De hecho, si probáramos con infinitas direcciones y sentidos más, nunca podríamos obtener un valor superior a $\sqrt{106}$. ¿Por qué esto es así? Pues porque la dirección y sentido del vector $\vec{c} \rightarrow (-18; 10)$ son las mismas que la del vector gradiente del campo calculado en el punto, y como habíamos deducido, el valor máximo se da en esa dirección y en ese sentido. Es más, digamos que el valor máximo que se puede obtener es el módulo del vector gradiente, y de hecho $|(-9; 5)| = \sqrt{106}$.

Actividad 4. Un hombre se encuentra ubicado en el punto $P(2; 1)$ respecto de un sistema de referencias en el plano xy . La temperatura del ambiente en $^{\circ}\text{C}$, es función de la posición en el plano, según la fórmula:

$$T(x; y) = \frac{40}{x^2 + y^2}$$

a) En su posición actual la temperatura es de 8°C . ¿En cuáles de las siguientes direcciones y sentidos le conviene moverse para que la temperatura crezca lo más rápido posible?



b) Analizar el límite:

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} T(x; y)$$

y comparar con la respuesta que se obtuvo en el punto anterior.

Actividad 5. Una mosca se encuentra en una habitación rectangular en donde se ha liberado un tóxico. El nivel de toxicidad en cada punto de la habitación viene dado por la ecuación:

$$T(x; y; z) = x^2 \cdot (y - 1)^2 \cdot (z - 3)^2 + 2z^2$$

Si la mosca está posicionada en el punto $P(3; 1; 1)$, demostrar que le conviene dejarse caer en picada para evitar la intoxicación.

Actividad 6. Si $f(x, y) = xe^y$:

- calcular la razón de cambio de f en el punto $P = (2, 0)$ en la dirección desde P hacia punto $Q = (\frac{1}{2}, 2)$
- ¿En qué dirección y sentido f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?

3.2. CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD

Si un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas en al menos un entorno de centro \bar{r}_0 , entonces es diferenciable en \bar{r}_0 .

Observación: la recíproca no se cumple. Esto quiero decir que puede existir algún campo escalar diferenciable en un punto \bar{r}_0 , y *sin embargo sus derivadas parciales* ser no continuas en ningún entorno de centro \bar{r}_0 .

Sin entrar en un debate muy extenso, es posible que este concepto genere alguna complicación en su interpretación. En resumen: sabemos que un campo escalar es diferenciable en un punto \bar{r}_0 . ¿es continuo en \bar{r}_0 ? Sí, pues la continuidad es una condición necesaria para la diferenciability. ¿es derivable en \bar{r}_0 ? También, y en toda dirección (incluyendo la de las derivadas parciales) porque al igual que la continuidad, la derivabilidad es una condición necesaria para la diferenciability. ¿Esto significa que si un campo escalar no cumple alguna de estas dos condiciones entonces no es diferenciable en \bar{r}_0 ? Exacto, porque repetimos, son dos condiciones necesarias. Ahora bien, si un campo es diferenciable en \bar{r}_0 , ¿entonces las derivadas parciales deben ser continuas en \bar{r}_0 ? No, pues la condición es suficiente, y no necesaria. Lo que sí podemos afirmar es que si un campo escalar tiene derivadas parciales continuas en \bar{r}_0 , entonces es diferenciable en él y *con eso solo* alcanza para afirmarlo, por el último teorema visto. Por último, diremos que a un campo escalar diferenciable en \bar{r}_0 , que además tiene derivadas parciales continuas en un entorno de centro \bar{r}_0 , se lo suele llamar **diferenciable con continuidad**.

Ejemplo:

5) El campo escalar de ecuación $f(x; y; z) = xy^2 + 3z$ es diferenciable en cualquier punto pues existen sus derivadas parciales y son continuas en todo el espacio:

$$f_x(x; y; z) = y^2$$

$$f_y(x; y; z) = 2xy$$

$$f_z(x; y; z) = 3$$

3.3. DIFERENCIAL

Si un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un \bar{r}_0 , entonces:

$$\Delta f = \underbrace{\nabla f(\bar{r}_0) \cdot \Delta \bar{r}}_{(1)} + \varepsilon \cdot |\Delta \bar{r}| \text{ con } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } |\Delta \bar{r}| \rightarrow 0$$

A la parte principal de esta suma (señalada con 1) se le llama *diferencial* del campo escalar f en \bar{r}_0 y se lo indica $df(\bar{r}_0)$.

Podemos considerar campos escalares particulares y generalizar una notación tal como lo hemos hecho para las funciones escalares y finalmente escribir $\Delta \bar{r} = d\bar{r}$.
Luego:

$$df(\bar{r}_0) = \nabla f(\bar{r}_0) \cdot d\bar{r}$$

Actividad 7. Utilizar campos adecuados y probar para un campo escalar de dos variables que $\Delta \bar{r} = (\Delta x; \Delta y) = (dx; dy) = d\bar{r}$.

Ejemplos:

6) Sea el campo escalar de ecuación $f(x; y) = e^{xy} - 2x^2y$, supongamos que nos movemos del punto $(1; 0)$ al punto $(1,03; -0,2)$.

$$\Delta f = f(1,03; -0,2) - f(1; 0) = e^{1,03 \cdot (-0,2)} - 2 \cdot (1,03)^2 \cdot (-0,2) - 1 \approx 0,2381$$

$$df(x; y) = (y \cdot e^{xy} - 4xy; x \cdot e^{xy} - 2x^2) \cdot (dx; dy)$$

$$df(1; 0) = (0; -1) \cdot (1,03 - 1; -0,2 - 0) = (0; -1) \cdot (0,03; -0,2) = 0,2000$$

7) **Cálculos aproximados de los errores en una medición:** Un cilindro elíptico recto tiene las siguientes medidas: el eje menor de la base tiene una longitud de 10cm , el eje mayor 16cm y la altura es de 12cm . Se utiliza un instrumento para medir su volumen que puede generar un error en cada medición de a lo sumo $0,1\text{cm}$ (por exceso o por defecto). Determinar cuál es el máximo error que se puede cometer en la medición del volumen en términos absolutos y relativos.

Por un lado $V(a; b; h) = \pi \cdot a \cdot b \cdot h$, entonces el volumen real es $V = 480\pi\text{cm}^3$.

El error absoluto que se comete en la medición está dado por $|dV|$.

Como $dV(a; b; h) = V_a \cdot da + V_b \cdot db + V_h \cdot dh = \pi \cdot b \cdot h \cdot da + \pi \cdot a \cdot h \cdot db + \pi \cdot a \cdot b \cdot dh$, será:

$$dV = \pi \cdot (5\text{cm}) \cdot (12\text{cm}) \cdot (0,1\text{cm}) + \pi \cdot (8\text{cm}) \cdot (12\text{cm}) \cdot (0,1\text{cm}) + \pi \cdot (8\text{cm}) \cdot (5\text{cm}) \cdot (0,1\text{cm})$$

$$dV = 19,6 \cdot \pi \text{cm}^3 = e_{abs}$$

El error relativo estará dado por $e_{rel\%} = \frac{e_{abs}}{V} \cdot 100 = \frac{19,6\pi \text{cm}^3}{480\pi \text{cm}^3} \cdot 100 = 4,08\%$

Actividad 8. Una lámina metálica de forma triangular tiene 12cm de base y 9cm de altura. Se calienta en un horno durante un tiempo. Al extraerla del horno su base se ha incrementado en $0,15\text{cm}$ y su altura en $0,2\text{cm}$. Utilizar diferenciales para determinar un valor aproximado del incremento de área.

Actividad 9. Un rectángulo de base de medida $B = 7,3\text{cm}$ y altura de medida $h = 5,8\text{cm}$ es medido por un instrumento de tal forma que se comete un error de medición por exceso de $0,03\text{cm}$ en la medida de la base; y un error de medición por exceso de $0,02\text{cm}$ en la medida de la altura. Determinar aproximadamente cuál es el error relativo porcentual cuando se calcula su área utilizando este instrumento, usando diferenciales.

Actividad 10. Se ha establecido la medida del volumen de un cilindro, con un instrumento que tiene cierto error, obteniéndose lo que se muestra en el siguiente cuadro:

	Valor verdadero	Valor medido
Longitud r del radio de la base	$r = 12,31\text{cm}$	$r = 12,36\text{cm}$
Longitud h de su altura	$h = 9,11\text{cm}$	$h = 9,31\text{cm}$

El instrumento continúa siendo “utilizable” si el error relativo porcentual no supera el $1,25\%$. Determinar si el instrumento continúa o no siendo utilizable.

Interpretación geométrica del diferencial para un campo escalar de dos variables

Si un campo escalar f tiene su dominio contenido en \mathbb{R}^2 , entonces diremos que el mismo es diferenciable en un $(x_0; y_0)$ si y solo si puede escribirse:

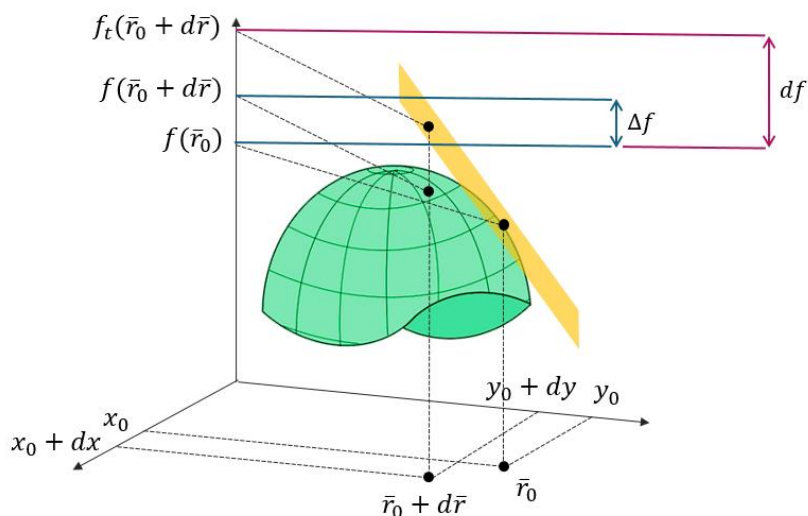
$$f(x; y) - f(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) + \varepsilon \cdot |(x - x_0; y - y_0)|$$

con $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)$.

Llamamos diferencial a la expresión $df(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (\Delta x; \Delta y)$, que como hemos visto puede escribirse finalmente:

$$df(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (dx; dy)$$

Puede deducirse que este valor $df(x_0; y_0)$ se interpreta geoméricamente de la siguiente manera:



Si f_t es el plano tangente a la gráfica del campo en el punto $(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$, entonces el valor df corresponde a la diferencia de imágenes $f_t(\bar{r}_0 + d\bar{r}) - f_t(\bar{r}_0)$, como se indica en la figura. A medida que $d\bar{r} \rightarrow \bar{0}$ serán $df \approx \Delta f$. (Notar que $f_t(\bar{r}_0) = f(\bar{r}_0)$)

Actividad 11. Comparar Δf con df para cada campo escalar en los puntos indicados:

a) $f(x; y) = y \cdot x^3 + 4xy$ $(x_0; y_0) = (1; 2)$ $(dx; dy) = (0,1 \ ; \ -0,04)$

b) $f(x; y) = 2^{xy^2} + \ln(3 - xy)$ $(x_0; y_0) = (1; 2)$ $(dx; dy) = (-0,05 \ ; \ -0,04)$

c) $f(x; y) = x - y + (xy)^3$ $(x_0; y_0) = (2; 0)$ $(dx; dy) = (-0,1 \ ; \ 0,03)$

d) $f(x; y) = 2x + 3y - 4$ $(x_0; y_0) = (1; 3)$ $(dx; dy) = (-0,2 \ ; \ 0,05)$

Razonar los resultados obtenidos en d).

3.4. APLICACIONES DE LA DIFERENCIABILIDAD

3.4.1. Regla de la cadena para la derivada de funciones compuestas

Como hemos estudiado en la unidad de funciones, a partir de dos funciones y bajo ciertas condiciones, puede realizarse la composición de ellas y obtener una nueva función. A continuación, y como consecuencia del concepto de diferenciabilidad, estudiaremos cómo se derivan las siguientes composiciones:

Composición entre una función vectorial y un campo escalar

Sea f un campo escalar con dominio en \mathbb{R}^n y \bar{r} una función vectorial con conjunto imagen en \mathbb{R}^n , entonces puede obtenerse la función escalar de ley $g(t) = f[\bar{r}(t)]$.

Actividad 12. Dado el campo escalar f diferenciable en \vec{r}_0 y la función vectorial \vec{r} derivable en t_0 , mostrar que la composición $g(t) = f[\vec{r}(t)]$ es derivable en t_0 , con $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y se cumple que: $g'(t_0) = \nabla f[\vec{r}(t_0)] \cdot \vec{r}'(t_0)$.

Ejemplo:

8) Sea el campo escalar de ecuación $f(x; y) = 2x^2y^3 - 3x + 2y$ y la función vectorial de ley $\vec{r}(t) = (t; -\text{sent})$, para hallar la derivada de la función escalar compuesta $g(t) = f[\vec{r}(t)]$ tenemos dos vías:

- La primera es realizar la composición y derivar una función escalar:

$$g(t) = -2 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^3 t - 3 \cdot t - 2 \cdot \text{sent}$$

$$\text{Será } g'(t) = -2 \cdot 2 \cdot t \cdot \text{sen}^3 t - 2t^2 \cdot 3\text{sen}^2 t \cdot \cos t - 3 - 2 \cdot \cos t =$$

$$= -4 \cdot t \cdot \text{sen}^3 t - 6t^2 \text{sen}^2 t \cdot \cos t - 3 - 2 \cos t$$

- La segunda es utilizar la fórmula obtenida:

$$g'(t) = \nabla f[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}'(t) = (4x(t)y(t)^3 - 3; 6x(t)^2y(t)^2 + 2) \cdot (1; -\cos t) =$$

$$= 4x(t)y(t)^3 - 3 + (6x(t)^2y(t)^2 + 2) \cdot (-\cos t) =$$

$$= -4 \cdot t \cdot \text{sen}^3 t - 3 + 6 \cdot t^2 \cdot \text{sen}^2 t \cdot \cos t - 2 \cos t$$

Como podemos observar, se arriba al mismo resultado.

Actividad 13. Dada la función compuesta $z = z[\vec{r}(t)]$ hallar $z'(t)$:

$$\text{a) } z = e^{3x+2y} \text{ donde } \vec{r}(t) = [\cos(t)]\vec{i} + t^2\vec{j} \quad \text{b) } z = \frac{x}{y} \text{ donde } \vec{r}(t) = e^t\vec{i} + [\ln(t)]\vec{j}$$

Actividad 14. Un cilindro que contiene agua a temperatura ambiente se traslada por una vía recta de manera que, definido un sistema de referencias, la posición del cilindro respecto del tiempo en minutos está dada por las ecuaciones:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad t \geq 0$$

La temperatura del recinto en donde se encuentra el cilindro está dada por la ley $T(x; y) = 2xy - x^2 + 27$.

a) Determinar en qué momento, posterior al minuto el cilindro debe quedarse en un lugar de manera que el agua que contiene se congele.

b) A medida que el tiempo va transcurriendo, la temperatura aumenta y disminuye. Si se debe dejar fijo el cilindro en un punto donde la temperatura ni aumente ni disminuya, ¿en qué momento debe hacerse?

Composición entre un campo vectorial y un campo escalar

Sea f un campo escalar con dominio en \mathbb{R}^n y \vec{r} un campo vectorial con conjunto imagen en \mathbb{R}^n , entonces puede obtenerse un nuevo campo escalar. La forma en la que se obtendrán las derivadas parciales de este campo escalar, resultado de la composición, se desarrollará en la resolución de las siguientes actividades:

Actividad 15. Considerando $z = z[\vec{r}(u; v)]$, calcular las derivadas parciales de primer orden de z respecto a las variables u y v :

$$a) z = \arctg\left(\frac{x}{y}\right) \quad \vec{r}(t) = [u \cdot \text{sen}(v)]\vec{i} + [u \cdot \text{cos}(v)]\vec{j}$$

$$b) z = \text{sen}(x \cdot y) \quad \vec{r}(t) = (e^u + v)\vec{i} + (e^{-u} + v)\vec{j}$$

Composición entre un campo escalar y una función escalar

Sea u un campo escalar y z una función escalar, entonces puede obtenerse un nuevo campo escalar. La forma en la que se obtendrán las derivadas parciales de este campo escalar, resultado de la composición, se desarrollará en la resolución de las siguientes actividades:

Actividad 16. En la composición $z = z[u(\vec{r})]$, calcular las componentes del vector gradiente de z :

$$a) z = u^3 \quad u(x; y) = xy + \frac{y}{x} \quad b) z = \ln(2u^2 + u) \quad u(x; y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

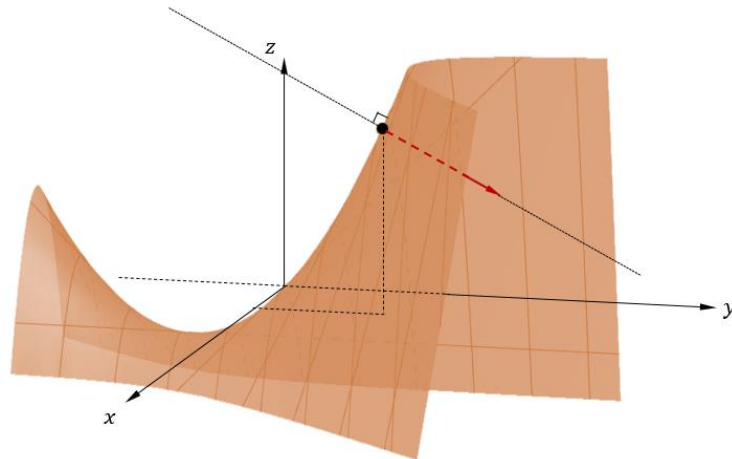
3.4.2. Interpretación geométrica del vector gradiente en el espacio

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $\vec{r}_0 \in A$ tal que el vector gradiente $\nabla f(\vec{r}_0)$ no es el vector nulo, entonces el vector $\nabla f(\vec{r}_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel que contiene a \vec{r}_0 y apunta en la dirección y sentido de la máxima variación del campo f .

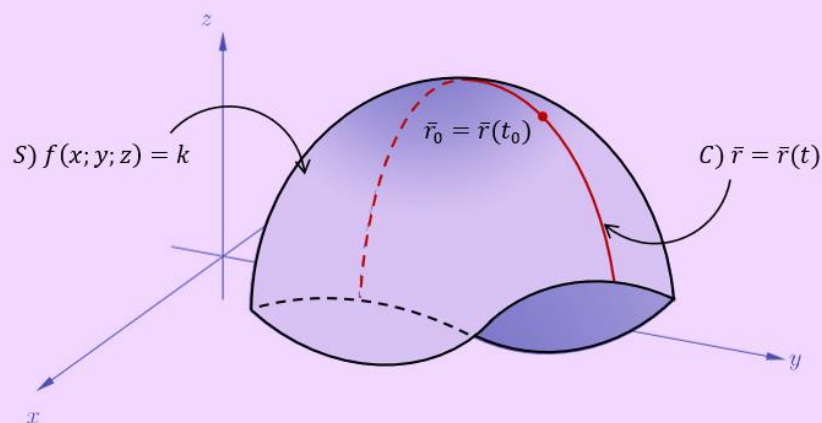
Ejemplo:

9) Sea el campo escalar de ecuación $F(x; y) = -x^2 + y + xy$, hallar las componentes de algún vector perpendicular a la gráfica de F en el punto $(1; 2; F(1; 2))$.

Por empezar, calculamos $F(1; 2) = 3$ y el punto es $(1; 2; 3)$. El campo también puede escribirse $z = -x^2 + y + xy \Leftrightarrow -x^2 + y + xy - z = 0$. Luego, esta última ecuación es la superficie de nivel del campo $f(x; y; z) = -x^2 + y + xy - z$ para el nivel $k = 0$. El vector gradiente es $\nabla f(x; y; z) = (-2x + y; 1 + x; -1)$, y en particular para el punto que nos interesa, $f(1; 2; 3) = (0; 2; -1)$, como se puede observar a continuación:



Actividad 17. Consideremos el campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\bar{r}_0 \in A_i$; una superficie de nivel S de este campo de ecuación $f(x; y; z) = k$ tal que $\bar{r}_0 \in S$; y una curva regular $C \subset S$ de parametrización $\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ que pasa por \bar{r}_0 , como se muestra en la siguiente figura:



Además, consideremos que \bar{r}_0 es la imagen de un valor t_0 , es decir $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$

- Recordar y graficar qué posición particular tiene el vector $\bar{r}'(t_0)$.
- Como $C \subset S$, todos los puntos que están sobre la curva también están sobre la superficie. Por lo cual, además de verificar la ecuación $\bar{r} = \bar{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$, también verifican la ecuación $f(x; y; z) = k$. Componer la función vectorial con el campo escalar y obtener una función escalar, llamémosla g .
- Obtener la expresión de la derivada de la función escalar g calculada en t_0 :
 - de forma directa (como se estudió en AMI)
 - utilizando la regla de la cadena vista en 3.4.1
- Igualar las expresiones anteriores, y concluir la posición de los dos vectores que quedan en la expresión.
- Concluir la demostración y representar gráficamente.

Actividad 18. Hallar las componentes de un vector perpendicular a la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ en el punto $P(1; 1; 3)$.

Actividad 19. Determinar para qué punto o puntos de la superficie cuya ecuación es $z = x^2y + 2x + 3xy$, el vector perpendicular a la superficie en dicho/s punto/s resulta paralelo al vector $\vec{a} \rightarrow (14; 0; -1)$.

3.4.3. Ecuación del plano tangente a una superficie

Que el vector gradiente resulte perpendicular a una superficie, es de gran utilidad para poder determinar la ecuación del plano tangente a una superficie dada, si el mismo existiera y fuera no nulo, concepto que se relaciona íntimamente con el de diferenciabilidad. Sin embargo, tenemos que hacer la distinción entre una superficie cuya ecuación esté dada en *forma implícita* $f(x; y; z) = 0$ (como, por ejemplo, la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) y una superficie cuya ecuación está dada en forma explícita $z = g(x; y)$ (como, por ejemplo, la mitad de superficie la esférica de ecuación $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$). Notemos que, de los dos ejemplos dados, la única que corresponde a la expresión de un campo escalar, es la segunda.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $\vec{r}_0 \in A_i$ tal que el vector gradiente $\nabla f(\vec{r}_0)$ existe y no es el vector nulo, entonces la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel S de ecuación $f(x; y; z) = k$ en el punto \vec{r}_0 es:

$$\pi_{tg}) \nabla f(\vec{r}_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Actividad 20. Explicar brevemente por qué los puntos genéricos $\vec{r} = (x; y; z)$ del plano tangente, verifican la ecuación mostrada en el apartado anterior.

Sea $g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $(x_0; y_0) \in A_i$ tal que el vector gradiente $\nabla g(x_0; y_0)$ existe, entonces la ecuación del plano tangente a la gráfica de g en el punto $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ es:

$$\pi_{tg}) (g_x(x_0; y_0); g_y(x_0; y_0); -1) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Esto último puede probarse fácilmente, asumiendo que la gráfica del campo g es una superficie de nivel de otro campo $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que contiene al punto \vec{r}_0 .

Ejemplo:

10) Sea el campo escalar de ecuación $z = -x^2 + y + xy$, determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de z en el punto $(1; 2; 3)$.

En el ejemplo 9, calculamos el gradiente en $(1; 2; 3)$: $\nabla f(1; 2; 3) = (0; 2; -1)$

Entonces será $\pi_{tg}(0; 2; -1) \cdot (x - 1; y - 2; z - 3) = 0$

$$\pi_{tg} \ 2y - z - 1 = 0$$

Actividad 21. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ en el punto $(-2; 1; -3)$.

Actividad 22. Se llama *recta normal* a una superficie a la perpendicular a la misma en un punto. Determinar la ecuación de la recta normal al elipsoide del punto anterior en $(-2; 1; -3)$.

Actividad 23. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto indicado a las superficies de ecuaciones:

- a) $z = x^2 \cdot y^2$ en $\bar{r}_0 = (2; 1; z_0)$
 b) $z = x^2 + y^2$ en $\bar{r}_0 = (1; -2; z_0)$
 c) $z = 2xy + x^2y^2 - 3x$ en $\bar{r}_0 = (2; 1; z_0)$

Actividad 24. Dada la superficie de ecuación $z = x^2y + axy - 1$, se pide:

- a) Hallar el valor de a para que una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $P(1; 1; a)$ sea $\pi \ 4x + 3y - z - 5 = 0$. Justificar.
 b) Además, encontrar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto $P(1; 1; a)$.

Actividad 25. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie cuya ecuación es $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$ en el punto $P(1; -1; 4)$.

3.4.4. Diferencial como una aproximación lineal

Supongamos que un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $(x_0; y_0)$. Entonces, por definición de diferenciability puede escribirse:

$$\underbrace{f(x; y) - f(x_0; y_0)}_{(1)} = \underbrace{\nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0)}_{(2)} + \varepsilon \cdot |(x - x_0; y - y_0)|$$

con $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)$

La parte señalada con (1) es un campo escalar cualquiera de ley $f(x; y) - f(x_0; y_0)$, mientras que la parte señalada con (2) es un campo escalar de ley:

$$df = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0)$$

Como habíamos mencionado anteriormente, la expresión señalada con (2) es la parte principal del segundo miembro ya que, al tender $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $(x; y) \rightarrow (x_0; y_0)$, esto significa que:

$$f(x; y) - f(x_0; y_0) \approx \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0)$$

en las proximidades de $(x_0; y_0)$. O también:

$$f(x; y) \approx \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) + f(x_0; y_0)$$

Gráficamente, podemos interpretar a lo anterior como lo siguiente: Tomando puntos lo suficientemente cerca de $(x_0; y_0)$, las imágenes de éstos por la superficie $z = f(x; y)$ serán *muy similares* a las imágenes por $z = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) + f(x_0; y_0)$.

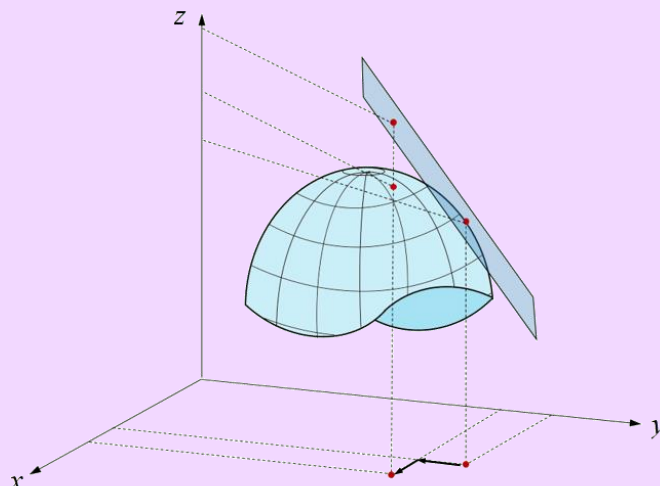
Pero:

$$\begin{aligned} z &= \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) + f(x_0; y_0) \\ 0 &= \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) - z + f(x_0; y_0) \\ 0 &= \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) - (z - f(x_0; y_0)) \\ 0 &= (f_x(x_0; y_0); f_y(x_0; y_0)) \cdot (x - x_0; y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) \\ 0 &= (f_x(x_0; y_0); f_y(x_0; y_0); -1) \cdot (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \end{aligned}$$

que, como habíamos visto anteriormente es la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(x_0; y_0; z_0)$. En definitiva, la importancia de la diferenciabilidad es la posibilidad de *aproximar* en cierta zona, *cualquier tipo de superficie* a un *plano*.

Actividad 26. En el siguiente gráfico indicar:

- La gráfica de $z = f(x; y)$ (del campo en estudio)
- La gráfica de $z = \nabla f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0) + f(x_0; y_0)$ (del plano tangente)
- El valor particular $(x_0; y_0)$ y los genéricos $(x; y)$.
- El valor Δf (incremento por el campo escalar)
- El valor df (incremento por el plano tangente)



Actividad 27. El campo escalar de ley $f(x; y) = x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1)$ es diferenciable en el punto $\bar{r}_0 = (-1; 3)$ ya que es posible escribir:

$$f(x; y) - f(-1, 3) = \nabla f(-1; 3) \cdot (x + 1; y - 3) + \varepsilon \cdot |(x + 1; y - 3)|$$

$$f(x; y) - f(-1, 3) = (-1; 8) \cdot (x + 1; y - 3) + \varepsilon \cdot |(x + 1; y - 3)|$$

$$x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1) - 12 = (-x + 8y - 25) + \varepsilon \cdot |(x + 1; y - 3)|$$

O también:

$$x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1) = (-x + 8y - 25 + 12) + \varepsilon \cdot |(x + 1; y - 3)|$$

$$\underbrace{x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1)}_A = \underbrace{(-x + 8y - 13)}_B + \varepsilon \cdot |(x + 1; y - 3)|$$

De manera que los valores de las dos expresiones señaladas con A y B son muy similares para los puntos que se encuentran en un entorno de $\bar{r}_0 = (-1; 3)$.

- Hallar las imágenes correspondientes para el punto $\bar{r}_1 = (-1,001; 2,99)$ por ambas expresiones (A y B) y compararlas.
- ¿qué se puede decir de la continuidad de f en el punto $\bar{r}_0 = (-1; 3)$?
- ¿qué se puede decir de la derivabilidad de f en el punto $\bar{r}_0 = (-1; 3)$?

Actividad 28. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie cuya ley está dada por $z = x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1)$ en el punto $\bar{r}_0 = (-1; 3; f(-1; 3))$. Luego, compararlo con el enunciado del ejercicio 27, y explicar gráficamente qué significa que un campo sea diferenciable en un punto.

Actividad 29. El campo escalar de ley $f(x; y) = x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1)$ es:

- Continuo en $\bar{r}_0 = (-1; 3)$ ya que:

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (-1; 3)} x^3 + y^2 - 2x \cdot (y - 1) = f(-1; 3) = 12$$

- Derivable en $\bar{r}_0 = (-1; 3)$ ya que siempre es posible encontrar el valor $D_{\bar{a}}f(-1; 3) = \nabla f(-1; 3) \cdot (a_1; a_2)$ tómesese el versor $\bar{a} \rightarrow (a_1; a_2)$ que se tome.

¿Podemos asegurar que el mismo es diferenciable en $\bar{r}_0 = (-1; 3)$ a partir de los dos datos anteriores?

3.4.5. Derivadas de funciones implícitas

Por lo general, las leyes de las funciones escalares y de los campos escalares se pueden expresar $y = f(x)$ e $z = f(x; y)$, respectivamente. En este caso decimos que

están dadas en forma explícita. Sin embargo, a veces las expresiones vienen dadas sin explicitar alguna de las variables y las escribimos de la forma $F(x; y) = 0$ y $F(x; y; z) = 0$.

A continuación, estudiaremos cómo se obtienen las derivadas de éstas, pero dando como dato del problema cuál es la variable que se derivada respecto de cuál o de cuáles. Para ello, utilizaremos el dF .

Actividad 30. Dada la ecuación $y = x + \ln y$, obtener las derivadas $y'(x)$ y $x'(y)$. Verificar la relación entre las derivadas de las funciones inversas.

Actividad 31. Dada la expresión $e^{xy} - 2\text{sen}(xy) + xz + z^2 + 3z + \frac{3}{2}x = 0$, encontrar las derivadas parciales de z respecto de las variables x e y .

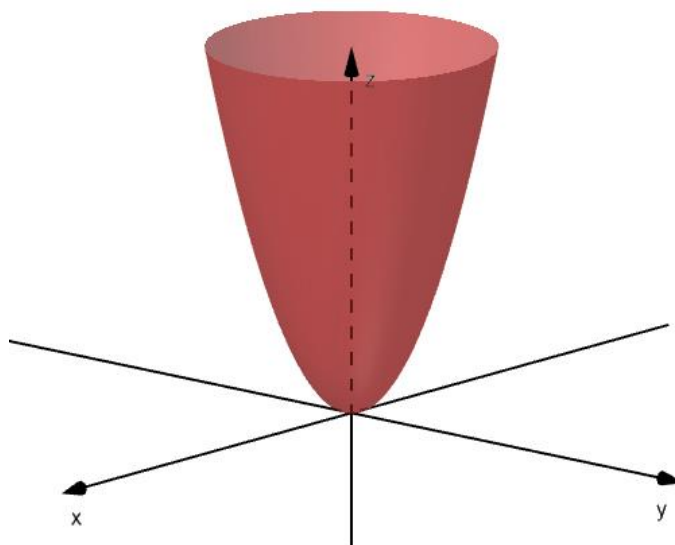
Actividad 32. Hallar u_x si $u^2 + 2xyz - x^2yu^3 = 5$.

3.4.6. Interpretación geométrica del vector gradiente en el plano

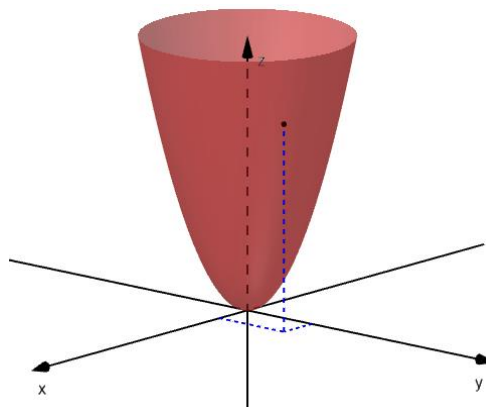
Vamos a desarrollar este razonamiento que nos permitirá resolver distintas problemáticas, a partir de un ejemplo, y luego lo generalizaremos sin demostrar.

Ejemplo:

12) Supongamos que tenemos el campo escalar cuya ley es $f(x; y) = x^2 + y^2$. Sabemos que su gráfica es la siguiente superficie (paraboloide circular con vértice en el origen y eje de simetría z):



Si consideramos por ejemplo el punto $(1; 2)$ en su dominio, al ser $f(1; 2) = 5$ entonces el punto $(1; 2; 5)$ pertenece a la superficie:



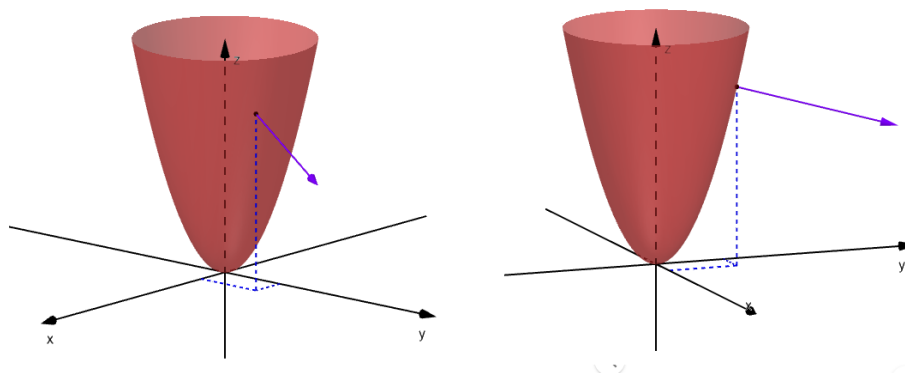
Si consideramos un campo escalar F de tres variables, de quién la superficie anterior es una superficie de nivel, una ley posible para el mismo es:

$$F(x; y; z) = x^2 + y^2 - z$$

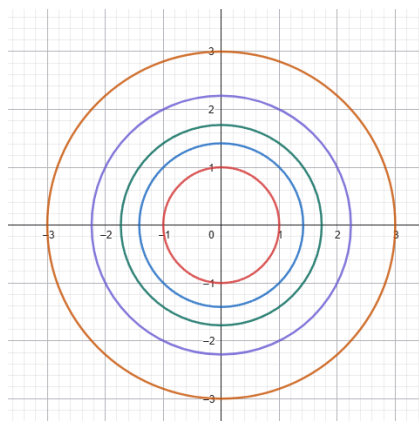
Habíamos visto que al calcular el gradiente de este campo F , supongamos en el punto $(1; 2; 5)$, éste resultaba perpendicular a la superficie. Vamos a comprobarlo.

$$\nabla F(x; y; z) = (2x; 2y; -1)$$

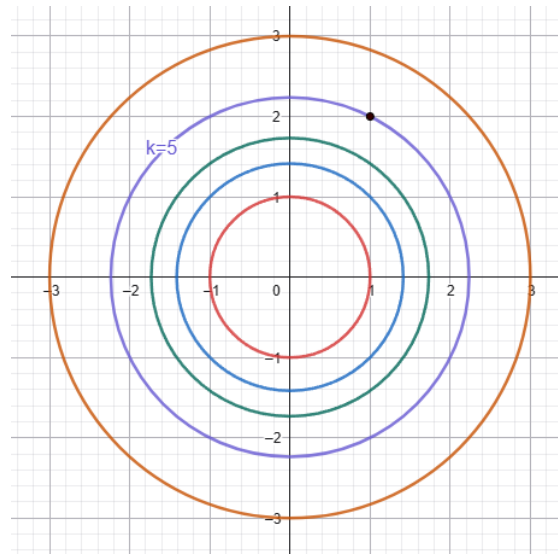
$$\nabla F(1; 2; 5) = (2; 4; -1)$$



Ahora bien, recordemos que, a un campo escalar de dos variables, le podíamos calcular su mapa de nivel (curvas de nivel). Haciéndolo para f se tiene:



Vamos a concentrarnos en particular en aquella que contiene al punto $(1; 2)$ que se da para el nivel $k = 5$.

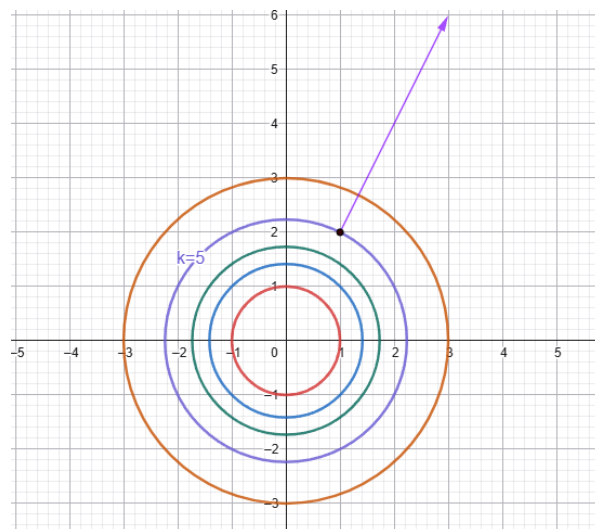


Si calculamos ahora el gradiente del campo f de dos variables y en particular en el punto destacado, obtenemos:

$$\nabla f(x; y) = (2x; 2y)$$

$$\nabla f(1; 2) = (2; 4)$$

Vamos a graficar dicho vector en el mapa de niveles:



Cabe preguntarse ahora, ¿ese vector resulta perpendicular a la curva de nivel que pasa por el punto $(1; 2)$? Para responder a esta cuestión vamos a ayudarnos de la recta tangente a la curva de nivel en el punto considerado.

La ecuación de la curva es $x^2 + y^2 = 5$. Derivamos en forma implícita (para un punto genérico $(x; y)$):

$$2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0$$

$$y'(x; y) = -\frac{x}{y}$$

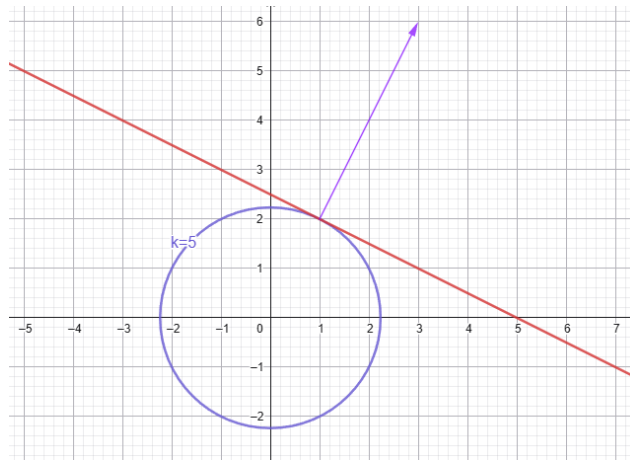
Ahora, busquemos el valor de la derivada en el punto de estudio ((1; 2)):

$$y'(1; 2) = -\frac{1}{2}$$

Lo anterior, recordemos, era la pendiente de la recta tangente. Vamos a construir la ecuación de la misma:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + 2$$

Graficamos dicha recta:



Busquemos ahora, la forma general de la misma:

$$\frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0$$

Si recordamos, esta forma nos otorga como información un vector \vec{n} que es perpendicular a la recta.

En este caso, es el vector:

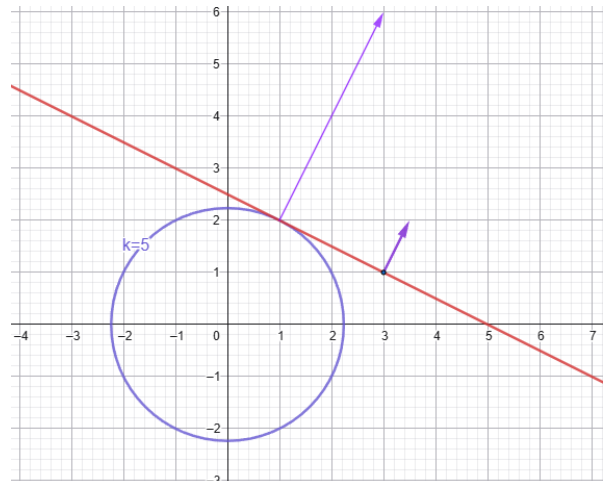
$$\vec{n} \rightarrow \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

Recordemos que el gradiente era el vector $\nabla f(1; 2) = (2; 4)$.

Si observamos ambos vectores, podemos notar que:

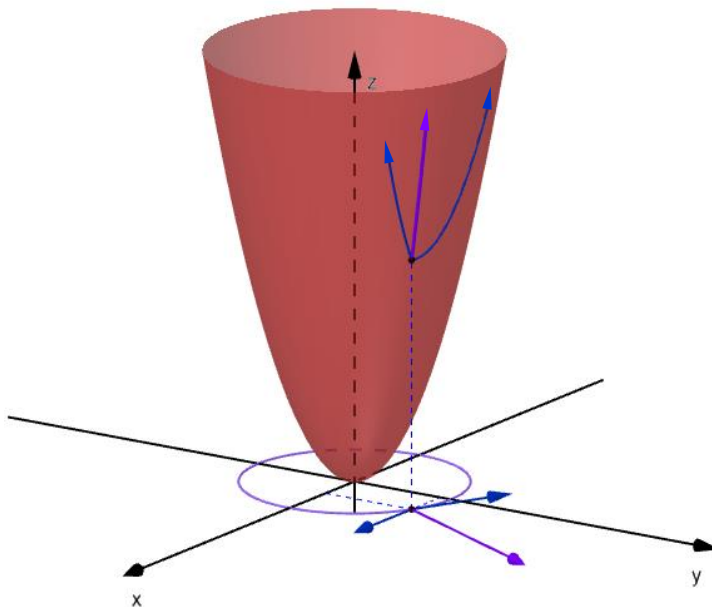
$$\vec{n} = \frac{1}{4} \cdot \nabla f(1; 2)$$

Por lo que ambos, tienen las siguientes posiciones:



Lo anterior, es suficiente para asegurar que los vectores son paralelos entre sí, y por lo tanto, el vector $\nabla f(1; 2)$ es perpendicular a la curva de nivel de ecuación $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $(1; 2)$.

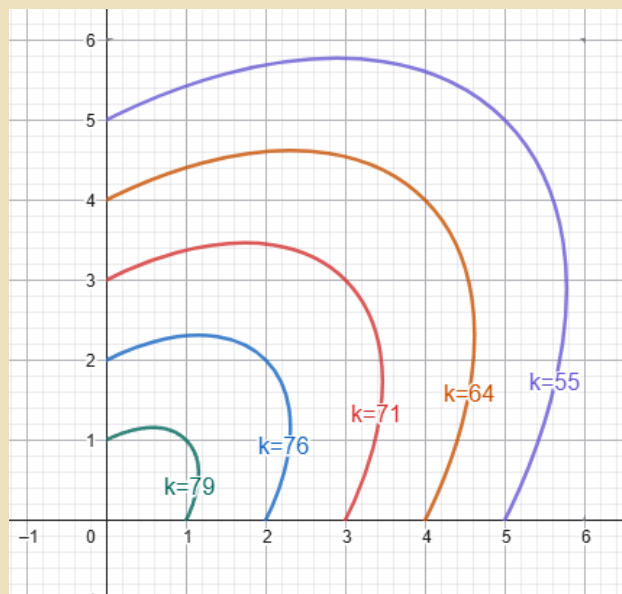
Recordemos, además, que el vector gradiente no sólo se dirige en forma perpendicular (ahora a la curva de nivel) en el punto, sino que además podía deducirse que apuntaba siempre en la dirección y sentido de mayor crecimiento. Volviendo a la gráfica del campo f , lo anterior significa que si me encuentro en el punto $(1,2)$ del plano xy y quisiera que la magnitud $f(x; y)$ creciera lo más posible, debería moverme en la dirección del gradiente (o sea, en la trayectoria que se muestra sobre la superficie). A modo de ejemplo, se muestran algunas trayectorias y entre ellas se destaca cuál es la de mayor crecimiento.



Actividad 33.

En cierta superficie de $6km \times 6km$ se estudia la concentración C de monóxido de carbono en el aire, medido en *ppm* (partes por millón).

De modo entonces, que existe un campo escalar de ley $C = C(x; y)$ que modeliza la situación y del cual, a continuación, se muestran algunas curvas de nivel:



a) Si se conoce que uno y solo uno de los siguientes es el campo vectorial \vec{F} que corresponde al gradiente del campo C , es decir $\vec{F}(x; y) = \nabla C(x; y)$, decidir cuál es explicando por qué se descartaron los restantes:

$$\vec{F}_1(x; y) = (2x + y; -2y + x)$$

$$\vec{F}_2(x; y) = (-2x + y; 2y + x)$$

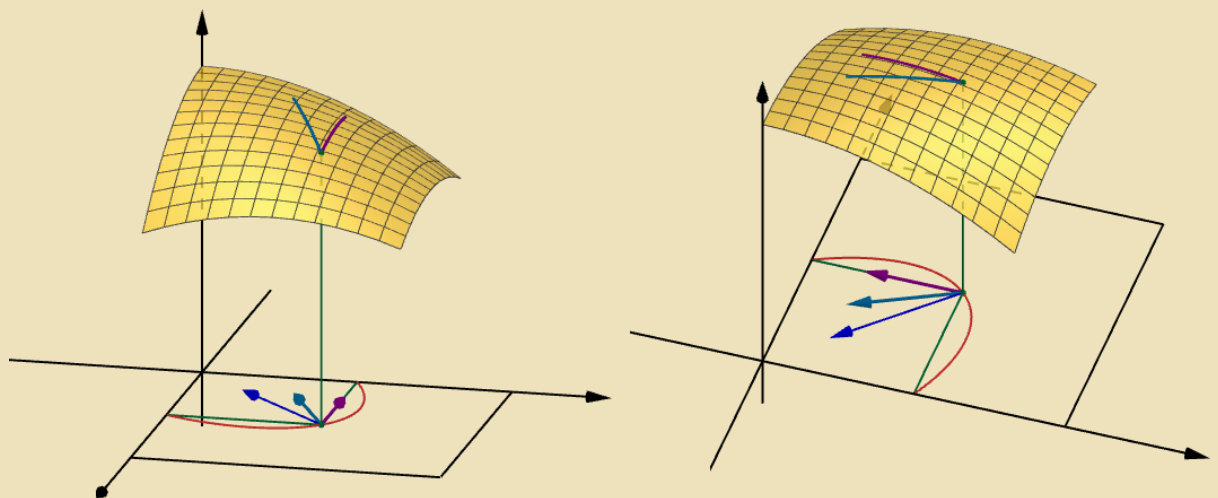
$$\vec{F}_3(x; y) = (-2x + y; -2y + x)$$

$$f_4(x; y) = x^2 + 2y^2 - 10$$

b) Si la ley del campo C tiene la forma $C(x; y) = -x^2 - y^2 + yx + k$, hallar el valor de k y luego, determinar cuál es la concentración máxima en el terreno si se sabe que se da en un vértice del mismo.

c) Calcular $\nabla C(3; 3)$ y representarlo gráficamente.

d) La siguiente gráfica muestra el dominio del campo escalar que estamos estudiando (terreno de $6\text{km} \times 6\text{km}$), las alturas que representan la concentración de monóxido de carbono para cada punto formando una superficie, el punto $P(3; 3; 0)$ ubicado en el plano xy . Si nos concentramos en el plano xy (con dos dimensiones), se ha marcado en azul el gradiente obtenido en el inciso c) y dos vectores más señalados con (A) y (B) que tienen componentes $(-2; -1)$ y $(-2; 0)$ respectivamente.



Determinar para cuál de las trayectorias marcadas sobre la superficie, la concentración de monóxido de carbono crece con mayor rapidez.

4. EXTREMOS DE UN CAMPO ESCALAR

4.1. EXTREMOS LIBRES

Al igual que para las funciones escalares en Cálculo, una aplicación del cálculo diferencial es la posibilidad de obtener los valores extremos que asume una función.

En este caso, estudiaremos los valores extremos que asume un campo escalar, particularmente si el mismo es de dos o tres variables.

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\bar{r}_0 \in A$ y $\delta > 0$, entonces:

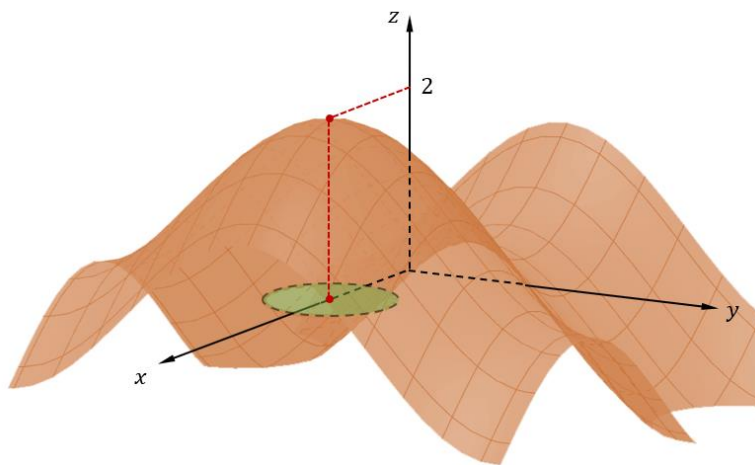
- $f(\bar{r}_0)$ es *máximo relativo* de $f \Leftrightarrow \forall \bar{r} \in E(\bar{r}_0, \delta) \cap A: f(\bar{r}) \leq f(\bar{r}_0)$
- $f(\bar{r}_0)$ es *mínimo relativo* de $f \Leftrightarrow \forall \bar{r} \in E(\bar{r}_0, \delta) \cap A: f(\bar{r}) \geq f(\bar{r}_0)$

Si un campo escalar f alcanza un máximo o un mínimo relativo para \bar{r}_0 , se dice que ha alcanzado un *extremo relativo* para \bar{r}_0 .

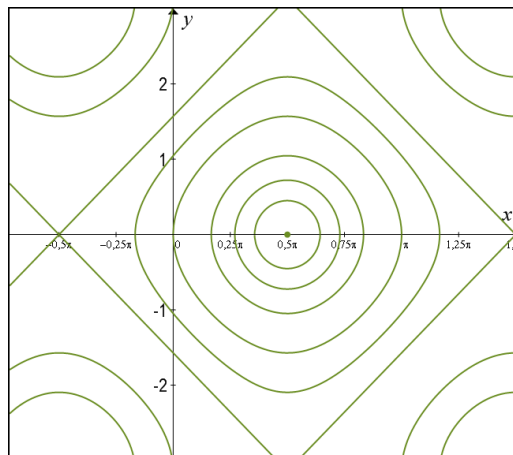
Cuando la condición para los $f(\bar{r})$ tomados se da $\forall \bar{r} \in A$, los extremos se llaman *absolutos*.

Ejemplo:

13) El campo escalar de ley $f(x; y) = \text{sen}(x) + \text{cos}(y)$ tiene un máximo relativo para $\bar{r}_0 = (\frac{\pi}{2}; 0)$ y es $f(\frac{\pi}{2}; 0) = 2$. La siguiente figura muestra la gráfica del campo escalar y cómo tomando un entorno con centro en $(\frac{\pi}{2}; 0)$, todos los $(x; y)$ de allí tienen imagen menor a la de $(\frac{\pi}{2}; 0)$ por el campo escalar:



El estudio de las curvas de nivel de un campo escalar de dos variables puede constituir una herramienta valiosa a la hora de *intuir* si una función tiene un extremo local. Si imaginamos intersecar la figura anterior con planos paralelos al plano xy , obtendremos un esquema como el que se muestra:



Podemos notar cómo las curvas de nivel se van “cerrando” a medida que nos acercamos al punto para el cuál existe un extremo, en este caso, un máximo.

Actividad 34. Dado el campo escalar de ecuación $z = 4 - (x^2 + y^2)$, se pide:

- Obtener algunas curvas de nivel para el mismo y representarlas gráficamente.
- Graficar el campo escalar.
- Decidir desde su gráfica, si el mismo tiene algún extremo relativo y/o absoluto.
- Relacionar las curvas de nivel con lo concluido en el inciso anterior.

Ejemplo:

14) El campo escalar cuya ley es $f(x; y) = (x^4 + y^2)2^y$ tiene un mínimo absoluto en $f(0; 0) = 0$. En efecto, para cualquier otro $(x; y) = (a; b) \neq (0; 0)$ veamos que el producto $(a^4 + b^2)2^b$ resulta positivo, con lo que $f(a; b) \geq f(0; 0)$, verificando así la definición dada.

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos

Puede probarse que:

Si un campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en A abierto, alcanza un extremo relativo en $\bar{r}_0 \in A$ entonces $\nabla f(\bar{r}_0) = \bar{0}$.

Puntos críticos de un campo escalar

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\bar{r}_0 \in A$, diremos que \bar{r}_0 es un punto crítico de f si y solo si:

$$\nexists \nabla f(\bar{r}_0) \quad \vee \quad \nabla f(\bar{r}_0) = \bar{0}$$

Ejemplo:

15) El campo escalar de ley $f(x; y) = \text{sen}(x) + \text{cos}(y)$ tiene infinitos puntos críticos, pues:

$$\begin{cases} f_x(x; y) = \text{cos}(x) = 0 \\ f_y(x; y) = -\text{sen}(y) = 0 \end{cases}$$

tiene como solución todos los puntos $(x; y)$ de la forma $(\frac{\pi}{2} + a.\pi; b.\pi)$ con a y b enteros. Entre ellos, al punto $(\frac{\pi}{2}; 0)$.

Actividad 35. Obtener los puntos críticos de los campos escalares cuyas leyes son:

a) $z = 4 - (x^2 + y^2)$

b) $z = y^2 - x^2$

c) $f(x; y) = x^3 - y^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3y$

Puntos silla o puntos de ensilladura de un campo escalar

Sea el campo escalar $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y el punto crítico \bar{r}_0 , se dice que $(\bar{r}_0; f(\bar{r}_0))$ es un *punto de ensilladura* de f si en todo entorno $E(\bar{r}_0; \delta)$ existe un punto $\bar{r}_1 = (x_1; y_1) \in A$ para el cual $f(\bar{r}_1) > f(\bar{r}_0)$ y un punto $\bar{r}_2 = (x_2; y_2) \in A$ para el cual $f(\bar{r}_2) < f(\bar{r}_0)$.

Actividad 36. Dado el campo escalar de ecuación $z = y^2 - x^2$, se pide:

- Obtener algunas curvas de nivel para el mismo y representarlas gráficamente.
- Graficar el campo escalar.
- Decidir desde su gráfica, si el mismo tiene algún punto de ensilladura.
- Relacionar las curvas de nivel con lo concluido en el inciso anterior.

Condición suficiente para la existencia de extremos relativos y/o puntos de ensilladura

Estudiaremos esta condición únicamente para campos escalares de dos variables:

Dado un campo escalar f diferenciable en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, con derivadas parciales segundas continuas en A , $\bar{r}_0 \in A_i$ punto crítico de f y $|H(\bar{r}_0)|$ hessiano para cada punto crítico, se cumple que:

i) $|H(\bar{r}_0)| > 0 \wedge f_{xx}(\bar{r}_0) > 0 \Rightarrow f(\bar{r}_0)$ es un mínimo relativo

ii) $|H(\bar{r}_0)| > 0 \wedge f_{xx}(\bar{r}_0) < 0 \Rightarrow f(\bar{r}_0)$ es un máximo relativo

iii) $|H(\bar{r}_0)| < 0 \Rightarrow (\bar{r}_0, f(\bar{r}_0))$ es un punto de ensilladura

iv) $|H(\bar{r}_0)| = 0$ no se puede asegurar nada y se debe analizar el problema de otra forma.

Actividad 37. Obtener los extremos y/o puntos de ensilladura de los campos escalares del inciso 35.

Actividad 38. Para los siguientes campos escalares, se pide:

- Obtener sus puntos críticos.
- Aplicar la condición suficiente para determinar si existen extremos relativos y/o puntos de ensilladura.

c) En caso de no poder asegurar nada con la condición suficiente, realizar otro estudio para determinar la existencia de extremos.

i) $f(x; y) = x^2 + y^3 - 6xy + 3x + 6y - 7$

ii) $f(x; y) = x^4 - 2x^2y - x^2 + 3y^2 + 1$

iii) $f(x; y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$

iv) $f(x; y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

v) $f(x; y) = x^2 \cdot y^2$

vi) $f(x; y) = e^{-x} \cdot \text{sen}^2(y)$

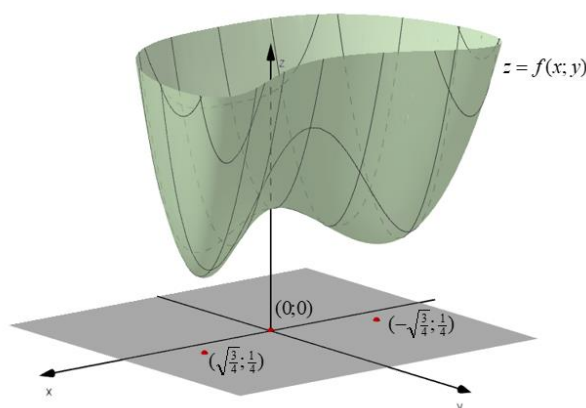
Observación: También pueden calcularse los extremos de campos escalares de más de dos variables, y la condición suficiente se modificará, pero no lo estudiaremos en este curso.

4.2. EXTREMOS CONDICIONADOS

En la actividad 38) ii) estudiamos los extremos y/o puntos de ensilladura del campo escalar cuya ley era $f(x; y) = x^4 - 2x^2y - x^2 + 3y^2 + 1$, buscando sus puntos críticos en todo el dominio del campo, sin tener ninguna restricción. Luego, aplicando la condición suficiente obtuvimos los resultados:

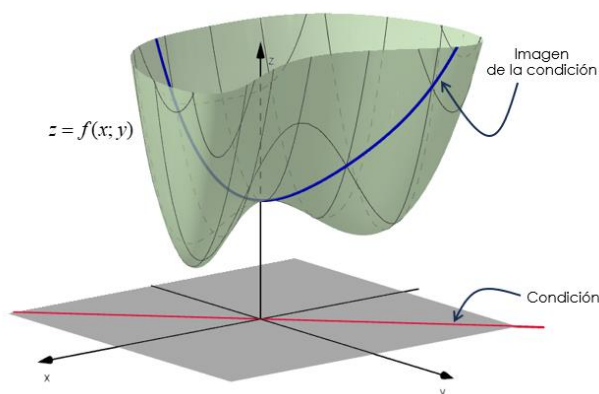
- $(0; 0; f(0; 0))$ es un punto silla
- $f(\sqrt{\frac{3}{4}}; \frac{1}{4})$ y $f(-\sqrt{\frac{3}{4}}; \frac{1}{4})$ son m_r

Estos resultados obtenidos pueden observarse en la gráfica del campo escalar que como sabemos, se trata de una superficie en el espacio y es la que se muestra a la derecha.



Pero supongamos ahora, que queremos calcular los extremos de dicho campo, sometiendo los puntos críticos del mismo a una **condición** arbitraria.

Por ejemplo, podríamos pedir que los puntos $(x; y)$ considerados tengan coordenadas opuestas, es decir que $y = -x$. El resultado del problema cambiará drásticamente. Observemos la gráfica en la que se ha agregado la curva condición $(y = -x)$ y la imagen de los puntos de esta curva, sobre la superficie:



De hecho, con esta condición la respuesta al problema cambia, pues como podemos observar en la figura, existe un único extremo: un mínimo relativo en $f(0;0)$. Para resolver este tipo de problemas, el matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) planteó introducir una nueva función F y calcularle a ella los puntos críticos para hallar la solución.

Si $f = f(x; y)$ es la función que necesitamos extremar (encontrarle los mínimos o máximos) y $g(x; y) = 0$ es la condición de vinculación entre las variables x e y , la nueva función F se construye de la forma:

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot g(x; y)$$

Observaciones:

- No realizaremos la demostración.
- La función de Lagrange puede aplicarse para campos escalares de más de dos variables.
- Puede suceder que exista más de una ecuación condicionante. El tratamiento de estos casos escapa a los objetivos de estos textos.

Actividad 39. El campo de ley $f(x; y) = \ln(x) + \ln(y)$ no posee puntos críticos.

a) Comprobar la afirmación dada.

b) Sin embargo, si consideramos los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, para uno y solo uno de ellos la función presenta un máximo relativo. Determinar para qué punto se cumple esto.

Actividad 40. De todas las cajas rectangulares que tienen área 1728cm^2 , ¿cuál es la que tiene el volumen mayor, si:

a) la caja tiene tapa?

b) la caja no tiene tapa?

Actividad 41. Un envase cilíndrico debe tener una capacidad de un litro. ¿cómo ha de diseñarse el envase para minimizar el costo?

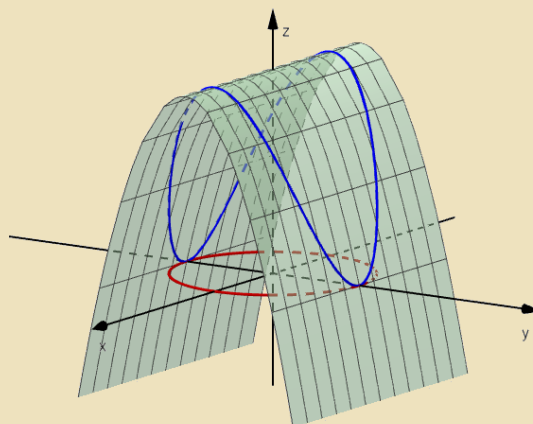
Actividad 42. Encontrar un punto sobre la curva $x^2y = 4$, cuya distancia al origen sea mínima.

Actividad 43. Determinar cuál es el punto del plano $x + y + 2z = 4$ más cercano al punto $(2; 1; 6)$ y calcular dicha distancia.

Actividad 44. Hallar la distancia máxima y mínima que hay entre el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ al origen.

Actividad 45. Al buscar los puntos críticos de la superficie de ecuación $z = 4 - y^2$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 4$, encontramos cuatro.

- Hallarlos.
- Efectivamente existen máximos y mínimos con la condición dada, como se muestra en la figura. En la misma indicar, cuál es el campo a extremar, cuál es la condición y concluir cuáles son los extremos.



REVISIÓN FINAL DE LA UNIDAD

1) Dados los campos escalares cuyas leyes son:

$$f(x; y) = x^2y^3 + 4xy^2 \quad y \quad g(x; y) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \sqrt{a_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_2} \end{vmatrix} y$$

Se pide:

- Utilizar diferenciales para aproximar la variación $f(1,003; 1,02) - f(1; 1)$.
- Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1; 1; 5)$.
- Explicar cuál es la relación que existe entre la derivabilidad y la continuidad en un punto de una función escalar vs un campo escalar. Para campos escalares, ¿qué consecuencia tiene que un campo sea diferenciable en un punto?
- Puede probarse la relación entre la diferenciabilidad y la derivabilidad obteniendo una forma más simple del cálculo de la derivada de un campo según la dirección y sentido de un versor $\bar{a} \rightarrow (a_1; a_2)$ mediante un producto escalar. Si las constantes que aparecen en la ley de g son las componentes de un versor y se sabe que son positivas, probar utilizando dicha forma que la derivada de ese campo en cualquier dirección y sentido siempre es constante.

2) Dado el campo escalar de ley $f(x; y; z) = 3x^2y + xz^2$:

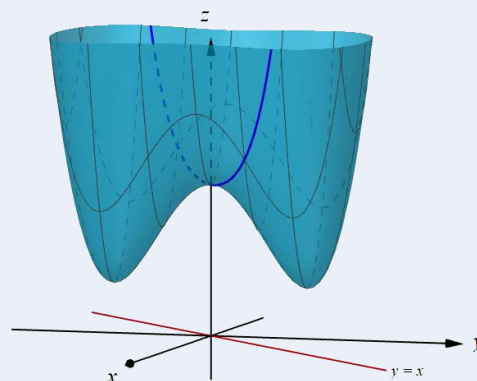
a) calcular la derivada de éste en el punto $\bar{r}_0 = (1; 2; -1)$ en la dirección y sentido:

i) del versor $\bar{a} \rightarrow (\frac{2}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{1}{9})$

ii) del vector $\bar{u} \rightarrow (26; 6; -4)$

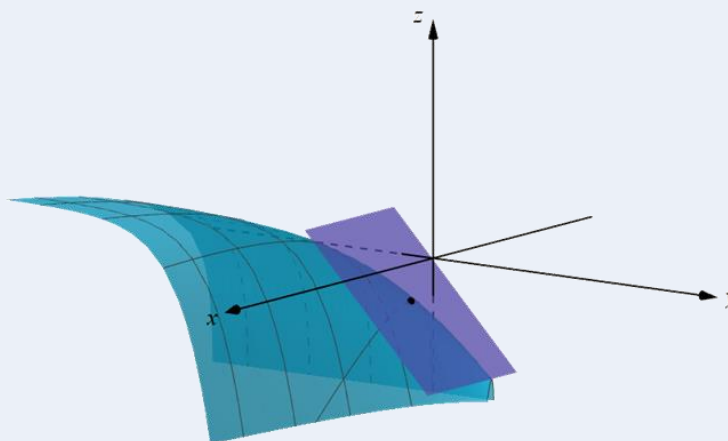
iii) creciente de la recta $\delta) \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{7}$

- Hallar sus puntos críticos.
- Utilizar la condición suficiente para determinar si existen máximos, mínimos y/o puntos de ensilladura.
- ¿Cómo se puede predecir lo anterior observando el mapa de curvas de nivel?
- Supongamos que ahora queremos calcular los extremos relativos del mismo campo escalar z pero solamente considerando aquellos puntos del plano xy tales que $y = x$ como se ilustra en la siguiente figura:



Plantear la función de Lagrange necesaria para hallar extremos, y sin resolver, concluir a partir de lo que se muestra en la figura.

- Se muestra la gráfica de superficie de ecuación $z = \ln(x) - xe^y$, sobre ella se marca el punto $\vec{r}_0 = (1; 0; z_0)$ y el plano π_{tg} tangente a la superficie en dicho punto.



¿Este plano es paralelo al eje x , lo contiene, o ninguna de las anteriores? Justificar.

- Encontrar los extremos del campo escalar $z = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$.

A continuación, podés encontrar algunas las soluciones de las actividades de revisión:

Ejercicio 2



Ejercicio 3



Ejercicio 4



Ejercicio 5



Ejercicio 6



Ejercicio 7



Ejercicio 8



Actividad 1) a) -2 b) 21 c) $\frac{24}{13}$ d) $-\frac{62}{\sqrt{13}}$

Actividad 2) $D_{\vec{a}}f(2; -1) = \frac{32}{\sqrt{29}}$

Actividad 3) a) $\frac{-3\sqrt{3}+13}{2}$ b) $\frac{43}{5}$

Actividad 6) a) 1 b) La tiene si tomamos la dirección $(1; 2)$ y vale $\sqrt{5}$

Actividad 8) $1,875\text{cm}^2$

Actividad 9) $e_{r\%} = 0,755\%$

Actividad 10) $e_{r\%} \approx 3\% > 1,25\%$ Se descarta.

Actividad 13) a) $z' = e^{3 \cos(t) + 2 t^2} (-3 \operatorname{sen}(t) + 4t)$

b) $z' = \frac{e^t}{\ln t} \left(1 - \frac{1}{t \ln t}\right)$

Actividad 15) a) $z_u = 0$ $z_v = 1$

Actividad 16) a) $\nabla z = \left(3 \left(xy + \frac{y}{x}\right)^2 \cdot \left(y - \frac{y}{x^2}\right); 3 \left(xy + \frac{y}{x}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$

Actividad 18) $\nabla F(1; 1; 3) = (2; 2; 6)$

Actividad 19) Para $(0; 4; 0)$ y $(-3; -4; -6)$

Actividad 21) $-x + 2y - \frac{2}{3}z - 6 = 0$

Actividad 22) $(x; y; z) = (-2; 1; -3) + \lambda \cdot (-1; 2; -\frac{2}{3})$ con $\lambda \in R$

Actividad 23) a) $4x + 8y - z - 12 = 0$

b) $2x - 4y - z - 5 = 0$

c) $3x + 12y - z - 16 = 0$

Actividad 24) a) $a = 2$

b) $(x; y; z) = (1; 1; 2) + \lambda \cdot (4; 3; -1)$ con $\lambda \in R$

Actividad 25) $-4x + 4y + 8z - 24 = 0$

Actividad 30) $y'(x) = \frac{y}{y-1} \quad x'(y) = \frac{y-1}{y}$

Actividad 31) $z_x = \frac{-ye^{xy} + 2y \cos(xy) - z^{-\frac{3}{2}}}{x+2z+3} \quad z_y = \frac{-xe^{xy} + 2x \cos(xy)}{x+2z+3}$

Actividad 32) $u_x = \frac{2yz - 2xyu^3}{2u - 3x^2yu^2}$

Actividad 34) c) Tiene un extremo relativo y absoluto (máximo) en $f(0; 0) = 4$

d) En el valor donde hay un extremo las curvas de nivel se van cerrando.

Actividad 35) a) $\bar{r}_1 = (0; 0)$

b) $\bar{r}_1 = (0; 0)$

c) $\bar{r}_1 = (0; 1) \quad \bar{r}_2 = (0; -1) \quad \bar{r}_3 = (1; 1) \quad \bar{r}_4 = (1; -1)$

Actividad 36) a) Tiene un punto silla en $(0; 0; f(0; 0))$

b) En el valor en el que hay un punto silla las curvas de nivel se cruzan.

Actividad 37) a) $f(0; 0)$ es un máximo relativo.

b) $(0; 0; f(0; 0))$ es un punto de ensilladura.

c) $f(0; 1)$ es un máximo relativo, $(0; -1; f(0; -1))$ es un punto de ensilladura, $(1; 1; f(1; 1))$ es un punto de ensilladura, $f(1; -1)$ es un mínimo relativo.

Actividad 38) i) $f(\frac{27}{2}; 5)$ es un mínimo relativo, $(\frac{3}{2}; 1; f(\frac{3}{2}; 1))$ es un punto de ensilladura.

ii) $(0; 0; f(0; 0))$ es un punto silla, $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{4})$ es un m_r , $f(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{4})$ es un m_r .

iii) $f(0; 0)$ es un m_r , $f(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{8}}{9})$ y $f(\frac{1}{3}; -\frac{\sqrt{8}}{9})$ son M_r .

iv) $f(-1; \frac{1}{2})$ es un M_r .

v) Todos los $f(0; y)$ y $f(x; 0)$ son m_r .

vi) Todos los $f(x; k \cdot \pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ son m_r .

Actividad 39) a) Puede probarse que no hay puntos del dominio del campo para los cuales no exista el gradiente o el gradiente sea nulo.

b) Para $(\sqrt{8}; \sqrt{8})$.

Actividad 40) a) La cúbica de lado de longitud $12\sqrt{2}cm$.

b) La de base cuadrada de lado de longitud $24cm$ y altura $12cm$.

Actividad 41) Con un radio de longitud $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ y altura $h = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Actividad 42) Son los puntos $(\pm 2^{5/6}; \sqrt[3]{2})$

Actividad 43) Es el punto $(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}; \frac{7}{3})$ y $d = \frac{11}{\sqrt{6}}$

Actividad 44) $\max\{d\} = 3$ para $(\pm 3; 0; 0)$ $\min\{d\} = 1$ para $(0; 0 \pm 1)$

Actividad 45) a) $\bar{r}_1 = (0; 2)$ $\bar{r}_2 = (0; -2)$ $\bar{r}_3 = (2; 0)$ $\bar{r}_4 = (-2; 0)$

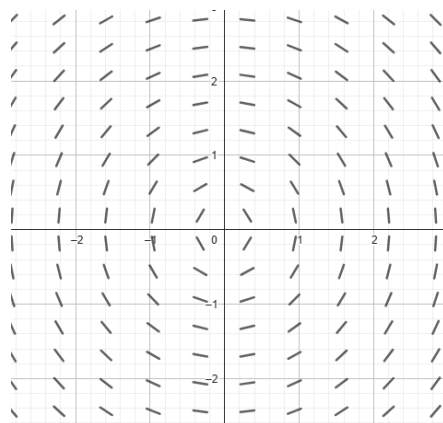
Modelo Evaluación Parcial 1

Temas: Ecuaciones diferenciales (U1) – Funciones (U2) – Límite y Continuidad (U3)

Parte A

1) Dada la ecuación diferencial $y' - 2y = \cos(x)e^{-2x}$, se pide:

- Clasificarla y explicar si además es una ecuación a variables separables, justificando la respuesta.
- Determinar su solución general.
- La siguiente figura muestra un campo de direcciones:



El mismo permite intuir la forma que tienen las soluciones. En este caso:

- de acuerdo con el gráfico mostrado, ¿qué forma tendrían las soluciones? ¿por qué?
- entonces, ¿corresponde a la ecuación diferencial dada? Justificar.

2) Dada la ecuación diferencial de segundo orden $y'' - 6y' + 9y = B(x)$, se pide:

a) Para la misma podemos escribir su ecuación diferencial de segundo orden homogénea asociada:

- Escribirla.
- ¿Es correcto decir que la solución de ésta es $y = C_1e^{3x} + C_2e^{3x}$? Justificar.

b) Hallar la solución particular si $B(x) = 2x + 4e^x$

c) Supongamos que $B(x) = 0$ y conocemos que la función de ley $y = f(x)$ es solución de la ecuación diferencial. Probar que la función de ley $g(x) = k \cdot f(x)$ para todo $k \in \mathbb{R}$ también lo es.

3) Resolver las siguientes consignas:

a) Elaborar un cuadro comparativo entre las ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo Bernoulli y las homogéneas en donde se muestre: la forma de reconocerlas, la sustitución que se utiliza para resolverlas, y cuál es el objetivo de dicha sustitución.

b) Clasificar y resolver la ecuación diferencial $(-y^{-2})dy = \left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

c) Para la ecuación diferencial $y' = (y - x^2) \cdot (4 - x^2)$, si trazamos el campo de direcciones de la ED, determinar en qué curvas están los puntos en los que los segmentos tienen dirección horizontal.

d) La ecuación de Clairaut $y = xy' - (y')^2$ tiene como soluciones $y = Cx - C^2$ e $y = \frac{x^2}{4}$. ¿Cómo se llama a cada uno de este tipo de soluciones, qué relación gráfica existe entre las mismas y cuál es el otro de tipo de solución existente?

Parte B

4) Se tienen las siguientes leyes de dos funciones:

Ley de la función 1	Ley de la función 2
$f(x; y) = \frac{2y - 2}{xy - x}$	$\vec{r}(t) = (\sqrt{6 - 2t}; \sqrt{t + 1})$

Se pide, para la función 1:

a) Decir qué tipo de función es y si la misma puede representarse gráficamente. Si la respuesta es positiva, explicar cuál es su gráfica y en qué espacio se realiza. Si es negativa, explicar por qué.

b) Hallar su dominio de definición A , graficarlo y determinar los conjuntos A' y A_i .

Sugerencia: Factorizar el denominador.

c) Calcular el límite de f cuando $(x; y) \rightarrow (1; 1)$ utilizando dos trayectorias: una recta vertical; y la recta identidad. A partir de los resultados obtenidos, ¿se puede afirmar sobre la existencia o no existencia de dicho límite? Justificar.

d) ¿Cuáles son las tres condiciones que deben cumplirse para que f sea continuo en el punto $(2; 3)$?

Se pide, para la función 2:

e) La misma es una función vectorial. Hallar su dominio, y graficar una aproximación de su conjunto imagen.

f) ¿Es posible calcular $\lim_{t \rightarrow 3} \vec{r}(t)$? ¿Y $\lim_{t \rightarrow 6} \vec{r}(t)$? Justificar ambas respuestas.

5) Resolver las siguientes cuestiones:

a) Proponer la ley de una función $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo dominio sea $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y - x > 0\}$. ¿qué tipo de función es?

b) Graficar la curva de nivel correspondiente al campo de ley $f(x; y) = \frac{y-3}{x}$ para el nivel $k = 0$.

Modelo Evaluación Parcial 2

Temas: Derivada (U4) – Diferenciabilidad (U5)

1) Se tienen las siguientes leyes de dos funciones:

Ley de la función 1	Ley de la función 2
$f(x; y) = \frac{2y - 2}{xy - x}$	$\bar{r}(t) = (\sqrt{6 - 2t}; \sqrt{t + 1})$

Se pide, para la función 1:

a) Calcular las componentes del vector gradiente del campo de ley:

$$g(x; y) = f(x; y) \cdot (xy - x)(e^y + \ln(x))$$

Se pide, para la función 2:

b) ¿Es posible calcular $\bar{r}'(3)$? ¿Y $\bar{r}'(1)$? Justificar ambas respuestas.

c) Calcular $\bar{r}'(t)$, en particular $\bar{r}'(0)$ y explicar cómo se interpreta geoméricamente este último.

2) Resolver las siguientes cuestiones:

a) Para el campo escalar de ley $f(x; y) = 3x^2y^3 + \text{sen}(x) - 4y$, esta función y sus derivadas f_x , f_y y f_{xy} son continuas en todo el espacio \mathbb{R}^2 . Explicar qué es lo que afirma el teorema de Schwarz y verificarlo para este campo.

b) Se tiene un campo escalar de dos variables de ley $f = f(x; y)$. Se quiere calcular la derivada del mismo en un punto de su dominio en dirección y sentido dados por un versor \bar{a} . Entonces, por definición, se procede a realizar el siguiente cálculo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(2 + 1 \cdot h)^2 \cdot (-3 + 0 \cdot h)^3 + 1] - [(2)^2 \cdot (-3)^3 + 1]}{h}$$

Identificar una ley para el campo, el punto en el que se calcula la derivada, y justificar si se trata o no de una derivada parcial.

3) Se tienen las funciones cuyas leyes son $f(x; y) = 2xy^2 + \ln(y)$ y $\bar{r}(t) = (t^2; t)$. Se pide:

a) El campo f puede derivarse en infinitas direcciones y sentidos dados por un versor \bar{a} . Supongamos que se quiere calcular la derivada direccional de f en el punto $(1; 1)$.

- i) De todos los valores que se pueden obtener, ¿cuál es el máximo? Calcularlo.
- ii) Proponer una dirección y sentido para el cual la derivada valga cero. Justificar.

b) Graficar la imagen de la función \bar{r} y explicar cómo se interpreta gráficamente al vector $\bar{r}'(1)$.

4) Dado el campo escalar de ley $f(x; y) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4y - y^2 + 2$, se pide:

a) Su gráfica es una superficie S que pasa por el punto $(2; 1; 7)$. Determinar la ecuación del plano tangente a S en dicho punto.

b) Determinar los puntos críticos del campo, y luego aplicar la condición suficiente para concluir si posee extremos relativos y/o puntos de ensilladura.

5) Resolver las siguientes cuestiones:

a) Aplicar diferenciales para aproximar el error que se comete al hallar el error relativo porcentual en el cálculo del volumen de un cilindro de longitudes $r = 8\text{cm}$ y $h = 6\text{cm}$ si se utiliza un instrumento que arroja las medidas $r' = 8,02\text{cm}$ y $h' = 6,04\text{cm}$.

b) Supongamos que conocemos que el campo escalar de ley $f = f(\vec{r})$ es diferenciable en \vec{r}_0 . Entonces también es derivable en \vec{r}_0 . Para demostrarlo, se intenta calcular la derivada de f en \vec{r}_0 para cualquier dirección y sentido dado por un vector \vec{a} , con el objetivo de determinar si la misma existe (pues si existe, entonces estamos demostrando la derivabilidad):

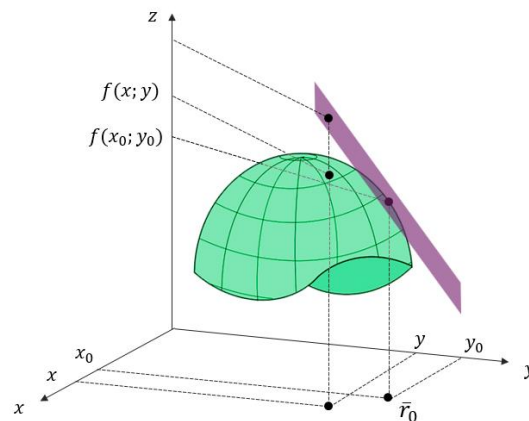
$$D_{\vec{a}}f(x_0; y_0) \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r}_0 + \vec{a}h) - f(\vec{r}_0)}{h} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) + \varepsilon \cdot |\vec{r} - \vec{r}_0|}{h} = \dots = \vec{v} \cdot \vec{a}$$

i) Justificar los pasos señalados con (1) y (2).

ii) Hacia el final, se llega a que la misma existe y vale $\vec{v} \cdot \vec{a}$. ¿Qué procedimiento se realiza para concluir que $\vec{v} = \nabla f(\vec{r}_0)$? Explicarlo, no desarrollarlo.

iii) Releer el enunciado b) y decidir si es posible que no exista $f(\vec{r}_0)$. Justificar.

c) En la figura se muestra la gráfica de un campo escalar de ley $f = f(x; y)$, un punto $(x_0; y_0)$ y el plano tangente a dicha gráfica en $(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$.



Se pide:

i) Si consideramos a $F(x; y; z) = f(x; y) - z$, graficar el vector $\nabla F(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$. Explicar.

ii) Desde $(x_0; y_0)$ nos movemos $d\vec{r}$ hasta encontrar el punto $(x; y)$. Marcar en la figura dx , dy , Δf y df , explicando qué es cada valor.

iii) Señalar un punto del plano para el cual el gradiente $\nabla f(x; y)$ sea nulo. Justificar.

Modelo Examen Final

1. Bloque Ecuaciones Diferenciales

a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constantes:

$$y'' - 4y' = 2x - 4 + e^x$$

b) Dada la ecuación diferencial $3y^2 dy - 2xe^{x^2} dx = 0$, justificar por qué se trata de una ecuación a variables separables, hallar su solución general, y la solución particular que cumple $y(0) = 2$.

c) Decir qué forma tiene una ecuación del tipo Clairaut, y explicar brevemente cuáles son los tres tipos de soluciones que puede tener la misma.

2. Bloque Funciones, Límites, Continuidad y Derivadas

a) El dominio de un campo es $A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 9\}$ y la curva de nivel correspondiente al nivel $k = 0$ es el eje x con sus correspondientes restricciones. Graficar el dominio y justificar si el mismo es un conjunto acotado, graficar la curva de nivel con las restricciones correspondientes y dar una posible ley para el campo.

b) Justificar adecuadamente por qué el límite siguiente no existe:

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x \cdot y^2}{x^3 + 3y^3}$$

c) Analizar la continuidad de la función de ley $\vec{r}(t) = \begin{cases} \left(\frac{t^2-5t}{2t}; 3\right) & \forall t \neq 0 \\ (-5; 3) & t = 0 \end{cases}$ en $t = 0$.

d) Graficar el conjunto imagen de la función vectorial de ley $\vec{r}(t) = (1 + t^2; 2 - t)$ con $t \geq 1$.

e) Para la función del inciso d) hallar $\vec{r}'(t)$, $\vec{r}'(2)$ y decir cómo se interpreta geoméricamente este último.

f) Escribir la expresión por definición de la derivada direccional del campo escalar de ley $f = f(x; y)$ en un punto $(x_0; y_0)$ según la dirección y sentido del versor \vec{j} . ¿qué relación tiene este número con el vector $\nabla f(x_0; y_0)$?

3. Bloque Diferenciabilidad y sus aplicaciones

a) Se tiene el campo de ley $f(x; y) = 2x^2y^3 - y$. Aproximar la diferencia de imágenes dada por $f(4,01; 2,002) - f(4; 2)$ utilizando diferenciales.

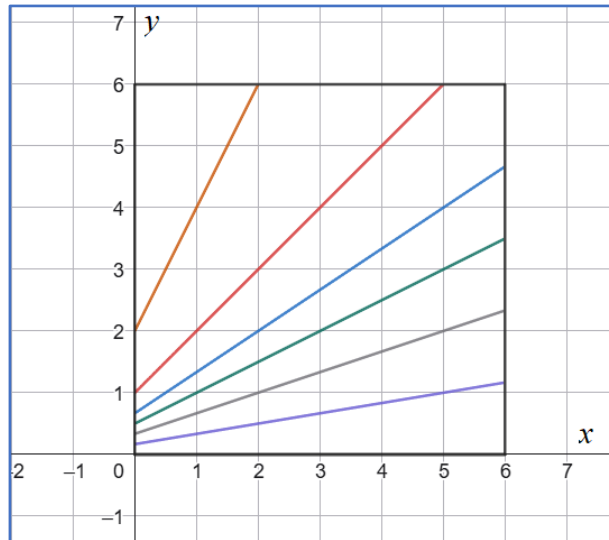
b) Dado el campo de ley $g(x; y) = x^2y + 2xy - y^3 + 1$, hallar la ley del plano tangente a la gráfica de f en el punto $\vec{r}_0(1; -1; f(1; -1))$.

c) Explicar cómo se deduce el valor máximo que puede tomar la derivada direccional de un campo escalar en un punto: en qué dirección y sentido se da, y cuánto vale.

d) Si $f(x; y) = 2x + y^2$ y $\vec{r}(t) = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(t) \\ y = \cos(t) \end{cases}$, utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada $g'(t)$ si $g(t) = f[\vec{r}(t)]$.

4. Bloque Integración de contenidos

Se tiene una placa de madera con espesor despreciable de $6\text{cm} \times 6\text{cm}$. En cada punto de la placa, la temperatura está dada por un campo escalar de ley $T = T(x; y)$ que depende de la ubicación de cada punto sobre el ancho (x) y el largo (y) de la placa. La figura que se muestra a continuación corresponde al mapa de curvas de nivel del mismo con todos valores de nivel $k > 0$:



a) Si se conoce que una y solo una de las siguientes leyes corresponde a la de T , decidir cuál es explicando por qué se descartaron las restantes:

$$T_1(x; y) = y - x \quad T_2(x; y) = y - x^2 \quad T_3(x; y) = \frac{30y}{x+1} \quad T_4(x; y) = \frac{30y}{-x+1}$$

b) Calcular $\nabla T(3; 4)$, graficarlo en la figura, y a partir de esto justificar cómo crece la temperatura en la placa (desde qué punto cardinal a qué punto cardinal).

c) Obtener algún punto de la placa donde la temperatura sea 60°C .

d) Una hormiga comienza a recorrer la placa desde el punto $A(5; 0)$ hasta salir de ella por un punto B , según el recorrido imagen de la función $\vec{r}(t) = (5 - \frac{t}{2}; 2t - \frac{1}{4}t^2)$ con $0 \leq t \leq 8$.

- i) ¿En qué posición de la placa se encuentra la salida de la hormiga?
- ii) Encontrar la ley de la función vectorial que describe la velocidad de la hormiga en que cada instante t .
- iii) Utilizar una composición entre funciones para determinar en qué momento o momentos, la hormiga pasó por zonas que tenían 30°C de temperatura.

- Apostol, Tom. (1973 – 1980): Calculus volúmenes I y II. Editorial Reverté. Barcelona. Segunda Edición. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee varios ejemplares.*
- Larson – Hostetler, E. (1995): “Cálculo y Geometría analítica”, tomo 2, quinta edición. Mc Graw Hill. España. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee varios ejemplares.*
- Rabuffetti, H. (1983): Introducción al análisis matemático (Cálculo 2). El Ateneo. Argentina. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee varios ejemplares.*
- Spinadel, V. (1981): Cálculos 2. Editorial Nueva Librería. Buenos Aires. Primera Edición. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee 2 ejemplares.*
- Stewart, J. (2006): Cálculo. Conceptos y Contextos; Thomson Editores. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee 6 ejemplares.*
- Stewart, J. (2008): Cálculo. Trascendentes tempranas; Thomson Editores. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee 6 ejemplares.*
- Stewart, J. (2006): Cálculo Multivariable; Thomson Editores. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee 5 ejemplares.*
- Zill, D. (1997): Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelos. Internacional Thomson Editores. Sexta Edición. *La biblioteca de la F.R.S.N. posee 1 ejemplares.*

