INSTITUTO SUPERIOR
DE FORMACIÓN DOCENTE
127
CIUDAD DEL ACUERDO
MATEMÁTICA

MATEMÁTICA APLICADA

4TO AÑO PROFESORADO EN MATEMÁTICA

PROF. ING. HERNAN MARTÍNEZ

Unidad 1
Generalidades sobre funciones escalares y sus aplicaciones

I. Funciones escalares y sus generalidades

1) Explicar por qué la notación de una función escalar genérica es $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y no directamente $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

2) Según su ley, las funciones escalares pueden clasificarse en funciones algebraicas o funciones trascendentes. ¿Cuál es la diferencia entre ellas? Completar el siguiente cuadro con las subclasificaciones correspondientes:

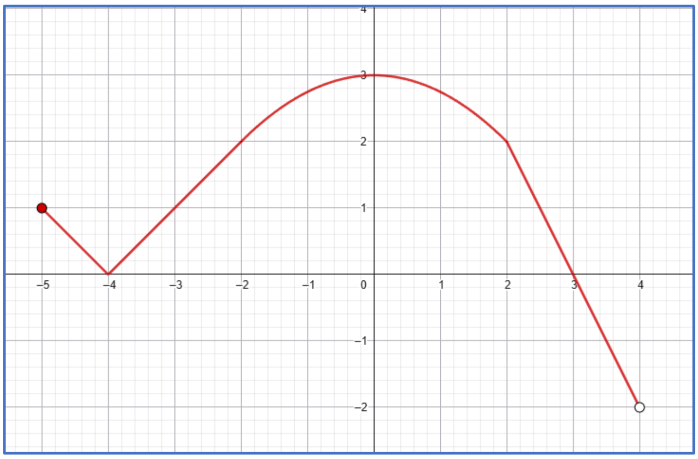
<table>
<tr><td colspan="3"></td><td>Operaciones que involucra a la variable x</td><td>Ejemplos</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ALGEBRAICAS</td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td>$y = 2x + x^4 + 1$</td></tr>
<tr><td>FRACCIONARIAS</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>$y = 2x + \sqrt[3]{x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">TRASCENDENTES</td><td colspan="2"></td><td></td><td>$y = 2^x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">LOGARÍTMICA</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td>$y = \cos(x)$</td></tr>
<tr><td>INVERSA</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td>$y = senh(x)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$y = artgh(x)$</td></tr>
</table>

3) Respecto del crecimiento de una función en un conjunto A:

a) Definirlo.
b) Determinar en qué conjunto la función de ley $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es creciente, y atendiendo a la definición anterior, probarlo.
c) ¿Es correcto decir que la función cuya ley se da a continuación es decreciente en su dominio?

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

4) Se tiene la función f cuya gráfica se muestra a continuación:



a) Indicar cuál es su dominio y su conjunto imagen.
b) ¿Cuál o cuáles de las siguientes maneras es la más apropiada para escribir su ordenada al origen?

3 $\quad\quad$ $(0;3)$ $\quad\quad$ $(3;0)$ $\quad\quad$ $y=3$

c) Definir raíz de una función, y dar el conjunto de raíces para este caso.
d) ¿Cómo se obtiene la gráfica de otra función g cuya ley es $g(x)=|f(x)|$?
e) Probar que g tiene las mismas raíces que f.

5) Resolver las siguientes cuestiones asociadas a los conceptos de límites, continuidad y derivabilidad de una función en un punto o en un conjunto:

a) Supongamos que se quiere calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

Sabemos que si el lateral izquierdo por ejemplo diera un valor h, y el lateral derecho diera por ejemplo un valor $m \neq h$, entonces la conclusión es que el límite buscado (el ordinario) no existe.

¿Sucede esto con el límite para $f(x)=\sqrt{x}$ cuando $x \to 0$?

b) ¿Cómo se determina analíticamente que una función es continua en un punto x_0?

c) ¿Cómo se determina gráficamente que una función es derivable en un punto x_0? ¿y analíticamente?

d) Entre los siguientes límites uno puede calcularse, pero se llega a la conclusión de que no existe, y otro directamente no puede calcularse. ¿Cuál es en cada caso? Justificar.

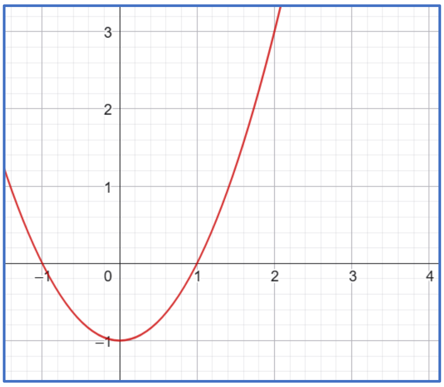
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{x-1}$$

e) Recordemos que existe una relación entre el signo de la derivada primera de una función en un conjunto, y el crecimiento de esta en dicho conjunto. La relación es la siguiente:

$$f \text{ derivable en } A \text{ y } f'(x) > 0\ \forall x \in A \quad \Rightarrow \quad f \text{ creciente en } A$$

Supongamos que tenemos que diseñar una actividad en donde evaluemos esta cuestión, y se nos ocurre realizar la siguiente:

¿Es la derivada primera de f positiva en el intervalo $(1; 2)$?



¿Está correctamente diseñada la actividad? ¿por qué?

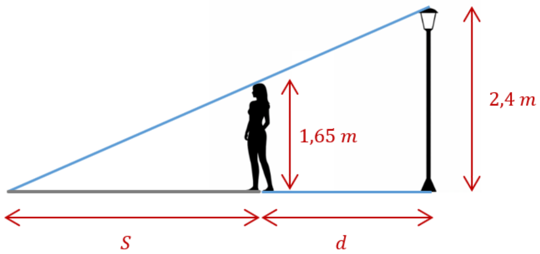
f) Dar un ejemplo en donde se muestre que la recíproca de la propiedad vista en el inciso e) no siempre es cierta.

II. Funciones escalares y algunas aplicaciones

6) Una caja rectangular ha de diseñarse de modo que su base sea un rectángulo que tiene un lado x y el otro lado debe ser el doble del anterior. Por otro lado, la altura debe estar dada por un valor igual al cuádruple del lado más corto de la base. Si la caja no contiene tapa, se pide:

a) Escribir al volumen de esta en función del lado más corto de la base.
b) Escribir a la cantidad de material a usar para construirla, en función del lado más corto de la base.
c) Clasificar a las funciones anteriores, estableciendo un dominio adecuado para ambas, según el contexto del problema.

7) Una mujer que mide $1{,}65\ m$ está parada cerca de un farol que tiene una altura de $2{,}4\ m$, como se ve en la figura. Encontrar una función que exprese a la longitud S de su sombra en función de la distancia d al faro.



¿qué tipo de función es la anterior?

8) La suma de dos números positivos es 100. Encontrar la ley de una función que modele el producto P de estos dos números en función de uno de ellos.

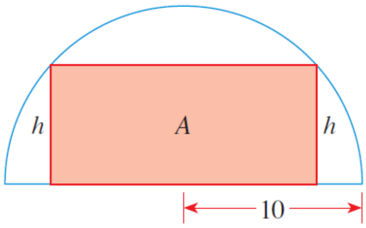
9) Un triángulo isósceles tiene un perímetro igual a $20cm$. Hallar la ley de la función que describa a su área A en función de la longitud b de su base.

10) En un triángulo rectángulo, un cateto mide el doble que el otro. Encontrar la ley de la función que describe el perímetro P del mismo en función de la longitud x correspondiente al cateto más corto.

11) Un fabricante diseña una lata cilíndrica circular recta para envasar aceite.

a) Determinar la ley de la función que indica la cantidad de metal necesario para construir la lata, en función de la longitud del radio de la base.
b) Si la lata debe tener $1l$ de capacidad, deducir cuáles son las dimensiones que la lata debe poseer.

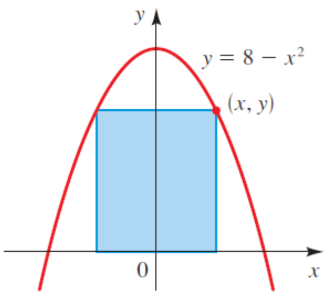
12) Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio de longitud 10, como se muestra en la siguiente figura:



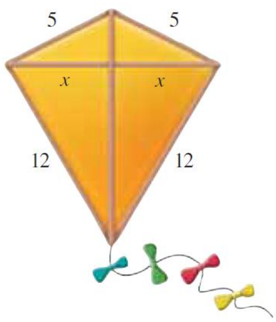
a) Hallar la ley de la función $A = A(h)$ donde A es el área del rectángulo y h la longitud de su altura.
b) Determinar las dimensiones del rectángulo que tiene mayor área posible.

13) Encontrar los dos números positivos cuya suma sea 100, pero la suma de sus cuadrados la menor posible.

14) Hallar las dimensiones que dan la máxima área posible para el rectángulo que se muestra en la figura:



15) La estructura rígida de un barrilete se construye con seis piezas de madera. Las cuatro que forman su borde han sido cortadas a las longitudes que se muestran en la figura:



a) Hallar la ley del área del barrilete respecto de x.
b) Determinar la longitud de las dos maderas transversales para que el área sea la máxima.

III. Modelos lineales

16) Una función afín es una función cuya ley tiene la forma $f(x) = ax + b$. Se pide contestar las siguientes preguntas:

a) La gráfica de una función de este tipo es una recta. ¿Cualquier recta está representada por una función afín? Justificar.
b) Las constantes a y b son valores reales y por lo tanto pueden ser positivas, nulas o negativas. Estudiar cómo afecta la gráfica las nueve combinaciones posibles para a y b.
c) Deducir las intersecciones con los ejes coordenados. Dar restricciones si corresponde.
d) a es la pendiente de la recta, es decir la tangente del ángulo que la recta forma con el eje x. ¿es esta afirmación correcta?

17) Las ganancias g en dólares, obtenidas por la venta de x toneladas de un cereal están dadas por la ecuación:

$$g(x) = 250x + 180$$

Obtener:

a) Las ganancias al vender $15tn$, $50tn$ y $2000tn$.
b) ¿Cuántas toneladas hay que vender para obtener una ganancia de $\$500000$?
c) Realizar la gráfica de la función.

18) Cuando una máquina va perdiendo valor a medida que se utiliza, se dice que *se deprecia* su valor. En una empresa, se deprecia linealmente una máquina industrial.

Si el costo original de la máquina es de $\$100000$, la función que determina el valor y de la máquina al cabo de x meses tiene como ley

$$y = -600x + 100000$$

a) ¿Qué significa la pendiente en este caso?
b) ¿Qué porcentaje de depreciación anula tiene la máquina respecto de su valor original?
c) ¿Cuántos días deberán pasar para que la máquina pierda su valor por completo?

19) Se ha investigado que la frecuencia con la que chirrían los grillos está dada por $C(t) = 4t - 160$ donde C es la cantidad de chirridos por minuto, y t la temperatura del ambiente en grados Fahrenheit. Se pide:

a) Calcular cuántos chirridos emite un grillo por minuto si se encuentra en un ambiente a $43°F$.
b) Determinar para qué temperatura el grillo no canta.

20) Por el alquiler de un coche cobran $24\ U\$S$ diarios más $0{,}2\ U\$S$ por kilómetro de uso.

a) Encontrar la ecuación de la recta que relaciona el costo diario con el número de kilómetros y representarla gráficamente teniendo en cuenta un dominio adecuado al problema.
b) Si en un día se ha hecho un total de $65km$, ¿qué importe debemos abonar?
c) ¿Cuántos kilómetros se tienen que haber recorrido para gastar $52\ U\$S$?

21) Se quiere crear un servicio de información electrónico, y se propone a los futuros clientes elegir entre tres formas de pago trimestral:

Tarifa A: pago de la suma global de $ 380.000
Tarifa B: pago de $ 147 más $ 0,20 por minuto de conexión.
Tarifa C: el precio del minuto de conexión es de $0,45.

Analizar cuál es la tarifa más conveniente para el consumidor según el tiempo de comunicación.

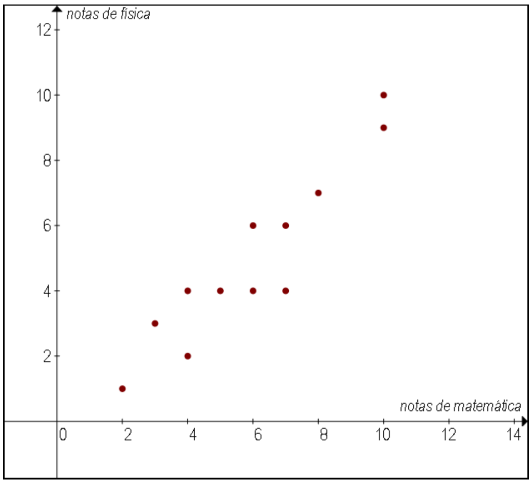
22) Existen diversas escalas para medir la temperatura, como la escala Celsius, la escala Fahrenheit, la escala Kelvin. Así, por ejemplo, el agua hierve a 100° en la escala Celsius, o se solidifica (congelamiento) a los 0° Celsius. Se quiere expresar a una temperatura x en escala Celsius en su equivalente y en grados Fahrenheit, se pide:

a) Hallar la ley de la función (investigar conversión)
b) Encontrar a qué temperatura (Fahrenheit) hierve el agua.
c) Encontrar a qué temperatura (Fahrenheit) se congela el agua.
d) Averiguar la temperatura corporal promedio en ambas escalas.

23) Cierta ave exótica se encuentra declarada en peligro de extinción y se ha comenzado a estudiar su población a partir del año 2012. Si al año de comenzado el estudio se conoce que había en el mundo 232500 aves, y en el año 2022 se registraban 165000, se pide:

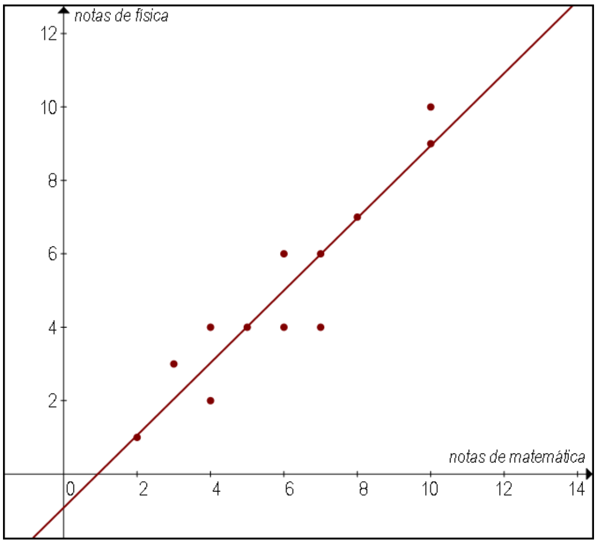
a) Construir la ley $P = P(t)$ donde P representa la cantidad de aves en el mundo dependiendo del tiempo t medido en años, conociendo que el modelo de evolución de la población es lineal.
b) ¿Cómo se interpreta en este caso la ordenada al origen y la raíz de la función?
c) Graficar indicando de antemano un dominio adecuado al contexto del problema.
d) ¿Cómo se interpreta la pendiente de la recta?

24) Muchas veces nos enfrentamos a problemas que muestran la relación entre dos variables x e y. Supongamos que la relación que mejor se ajusta entre ellos es lineal. Observemos el siguiente ejemplo en donde se muestra la relación que existe entre las notas que obtuvieron los alumnos de un curso en matemática (x) comparadas con las que obtuvieron en física (y):



Es evidente que la gráfica toma como muestra a un grupo de al menos 12 alumnos (se observan 12 puntos en la gráfica). Así por ejemplo uno de los alumnos que tiene un 4 en matemática, tiene un 2 en física; o uno que tuvo un 8 en matemática, tuvo un 7 en física.

Nuestra idea es buscar una función afín (modelo lineal) que mejor se ajuste a esta distribución de puntos. Es decir, obtener una ley $y = f(x)$ que permita predecir la nota que obtendrá un alumno en física conociendo la que obtuvo en matemática. Obviamente, esto es una estimación. Como resultado de esto, existe lo que se conoce como recta de regresión líneal, que para el caso planteado, sería la que se muestra a continuación:



Ya estudiaremos en profundidad esto en otra unidad, pero primero vamos a tratar de obtener la recta que mejor se ajuste a una pequeña distribución de puntos (solo vamos a tomar tres), explicando en qué consiste el método haciéndolo manualmente (sin recurrir a ninguna fórmula).

Supongamos que se tienen los puntos $A(1;2)$, $B(3;1)$ y $C(5;3)$. Nuestro objetivo es encontrar la recta que mejor se ajuste a dichos puntos.

La recta tendrá como ecuación $y = ax + b$, con lo cuál nuestro objetivo es buscar dichos valores a y b.

a) Graficar la nube de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas.
b) Llamamos $(\bar{x}; \bar{y})$ al punto cuya abscisa es la media aritmética de las abscisas los puntos dados; y cuya ordenada es la media aritmética de las ordenadas de los puntos dados. Hallarlo.
c) Partimos de la premisa de que la recta buscada debe contener a ese punto. Con lo cual, el punto $(\bar{x}; \bar{y})$ debe verificar la ecuación de dicha recta. Reducir la expresión $y = ax + b$ a una expresión que ya no dependa de b.
d) Vamos a concentrarnos ahora en las diferencias de imágenes que existen entre los puntos A, B y C y los puntos $A´$, $B´$ y $C´$ pertenecientes a la recta de regresión que tienen la misma abscisa que A, B y C, respectivamente. Nuestro objetivo es minimizar la suma de dichas diferencias. Llamémoslas e_a, e_b y e_c, respectivamente. Calcularlas.
e) Si sumamos los tres valores obtenidos, evidentemente obtendremos el valor cero porque las diferencias con la recta de regresión se van compensando entre sí. Llamemos entonces $S = S(a)$ a la función que muestra la suma de los cuadrados de e_a, e_b y e_c. Se puede probar que el valor mínimo de la suma es el valor mínimo de la suma de sus cuadrados. Obtener entonces el valor de a que hace mínima esta suma de diferencias.
f) A partir de lo anterior, obtener la ecuación de la recta de regresión y graficarla.
g) Comprobar en algún programa que la recta encontrada es correcta. Por ejemplo, si se hace en Excel, deberían seguirse los siguientes pasos:

- Introducir los datos en forma de tabla.
- Seleccionar la tabla e insertar gráfico de dispersión.
- Posarse en un punto y tocar botón derecho del mouse (menú contextual).
- Seleccionar “agregar línea de tendencia”.
- Elegir en las opciones, el modelo lineal.
- En ese mismo menú, debajo, seleccionar “Presentar ecuación en el gráfico”.

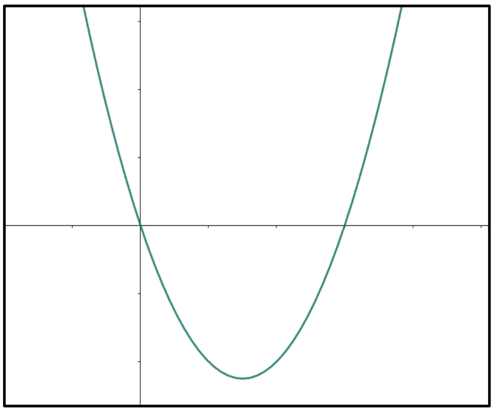
IV. Modelos cuadráticos

25) Una función cuadrática es una función cuya ley tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se pide contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Qué restricciones existen para alguna de las constantes a, b, c? ¿por qué?
b) Hallar sus intersecciones con los ejes, sin utilizar ninguna fórmula conocida. (Deducir)
b) La gráfica de una función cuadrática es una parábola. Indicar qué características tiene la misma si:

i) $a > 0, b = 0, c > 0$ ii) $a > 0, b = 0, c < 0$ iii) $a > 0, b = 0, c = 0$
iv) $a > 0, b > 0, c = 0$ v) $a < 0, b > 0, c = 0$

26) Se tiene la gráfica de la función cuya ley es $y = Ax^2 + Bx + C$ que se muestra a continuación:



Todas las siguientes afirmaciones son verdaderas. Explicar por qué:

a) $A > 0$ b) $C = 0$

c) $-\frac{B}{2A} > 0$ d) $\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4.A.C}}{2.A}\right).\left(\frac{-B-\sqrt{B^2-4.A.C}}{2.A}\right) = 0$

e) $f\left(-\frac{B}{2A}\right) < 0$ f) $B^2 - 4.A.C > 0$

27) En un canal de televisión están investigando el efecto de los aplausos y otros ruidos en el estudio, durante un programa de entretenimientos. Encontraron que este efecto durante dicho programa produce un nivel de ruido (N) de $N(x) = -x^2 + 14x + 15$ decibeles, a los x segundos del final del juego más exitoso.

a) Realizar la gráfica de la función.
b) Marcar con color la parte de la gráfica que tiene sentido para el contexto del problema.
c) ¿Cuándo se produce el mayor nivel de ruido?
d) ¿A qué nivel se llega en el momento de mayor ruido?
e) ¿Cuánto tiempo después del final del juego se produce nuevamente el silencio?
f) ¿Cuánto tiempo transcurre para que el nivel de ruido alcance los 48 decibeles?

28) Se colocaron peces en un estanque, que con el transcurso del tiempo comenzaron a reproducirse rápidamente, y hasta que a partir de un determinado momento dicha cantidad comenzó a disminuir por falta de espacio y comida.
Se supo además que el modelo matemático que se aproximaba a este comportamiento estaba dado por la función de ley $C(t) = -10t^2 + 40t + 50$ donde C es la cantidad de peces y t el tiempo en años.

a) Realizar la gráfica de la función dada.
b) Marca con color la parte de la gráfica que tiene sentido para el contexto del problema.
c) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?
d) ¿Cuál fue la cantidad máxima que llegó a haber? ¿En qué momento?
e) ¿Qué significa la ordenada al origen para este problema?
f) ¿En qué momento se tendrá un total de 80 peces?
g) ¿Se extinguen en algún momento? ¿Cuándo?

29) El valor y, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo x, en años, viene dado por la función:

$$y = -4x^2 + 60x - 15 \qquad 1 \leq x \leq 8$$

a) ¿Cuál será el valor de las existencias para $x = 2$? ¿Y para $x = 4$?
b) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En qué instante se alcanza?
c) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?

30) En una empresa, trabajan en un taller una cierta cantidad de operarios. Se decide agregar más operarios en dicho taller y, luego de realizar un estudio en una empresa, se estimó que el número de unidades producidas (y) depende de la cantidad de operarios agregados (x) que estén trabajando en ese momento.

La ley de esta situación es: $y = -x^2 + 40x + 500$.

a) Graficar la situación.
b) ¿Cuántas unidades se producen sino se agrega ningún operario?
c) ¿Cuál es el máximo de unidades que se pueden producir?
d) ¿Lo anterior se produce al agregar cuántos operarios?
e) ¿Qué sucede si se agregan 60 operarios?

31) En un lago artificial se ha introducido una población de peces para su estudio. Se ha observado que, bajo ciertas condiciones ambientales, el crecimiento de la población sigue un modelo cuadrático durante los primeros meses.

A partir de los registros, se sabe que al finalizar el primer mes la población era de 171 peces, al segundo mes la población era de 180 peces, mientras que al terminar el tercer mes alcanza los 187 peces. Con esta información, determinar:

a) La expresión algebraica de la función que relaciona la cantidad P de peces en el lago con el tiempo t medido en meses.
b) La población inicial de peces que fueron introducidos en el lago.
c) El momento en que se produce la mayor cantidad de peces y el valor de dicha población.
d) ¿qué sucede con esta población de peces al transcurrir entre los 18 y los 20 meses?

32) La ecuación que describe la posición de un objeto que se encuentra en caída libre respecto del tiempo está dada por $x = -4{,}9t^2 + 30{,}625$. Se pide:

a) Determinar la altura desde la que se deja caer.
b) Determinar a qué altura se encuentra luego de 1 segundo de haberlo dejado caer.
c) Calcular en qué momento choca contra el piso.
d) Determinar la rapidez con la que toca el piso.
e) Construir una tabla con valores apropiados y graficar la posición respecto del tiempo.

V. Modelos exponenciales

33) Una función exponencial es una función que tiene como ley

$$f(x) = a^x$$

a) Una restricción para a es que sea mayor que cero y distinto de 1. ¿a qué se deben estas restricciones?
b) Deducir si estas funciones tienen ordenada al origen y/o raíces.
c) Calcular los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ analizando los valores que toma a.
d) Una forma más general de una función exponencial es aquella que tiene como ley

$$g(x) = k.a^{x-h} + c \text{ con } k, h, c \text{ distintos de cero}$$

¿qué características tiene g respecto de f?
e) ¿Qué transformación sobre f se produce al considerar $h(x) = a^{mx}$?
f) Probar, utilizando derivadas que la función no tiene puntos críticos y concluir si tiene extremos relativos.

34) Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la transparencia del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por:

$$I(x) = 10e^{0,008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.

a) Encontrar la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5\ l$?

35) Una población de aves, cuenta inicialmente con 50 individuos y se triplica cada 2 años.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de aves respecto del tiempo en años?
b) ¿Cuántas aves hay después de 4 años?
c) ¿Después de cuánto tiempo la población de aves será de 1000 individuos?

36) En una investigación científica, una población de moscas crece exponencialmente. Si después de 2 días hay 100 moscas y después de 4 días hay 300 moscas.

a) ¿Cuál es la fórmula de la función que representa el crecimiento de la población de moscas?
b) ¿Cuántas moscas hay después de 5 días?
c) ¿Después de cuánto tiempo la población de moscas será de 1000 individuos?

37) Una población de bacterias en un laboratorio crece según un modelo exponencial dado por $P(t) = P_0.e^{kt}$ donde P es la cantidad de bacterias en unidades y t es el tiempo en segundos. Si al comenzar el experimento se colocan 500 bacterias que comienzan a reproducirse de modo que a los tres segundos hay 2000 bacterias:

a) Hallar la ley que modeliza la situación.
b) Determinar cuántas bacterias habrá aproximadamente a las cinco horas de iniciado el estudio.
c) Determinar en qué momento la población alcanzará las 10000 bacterias.

38) Bajo condiciones ideales, cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente hay 1000 en una colonia.

a) Encontrar un modelo para la población de bacterias después de t horas.
b) ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de $15\ hs$?
c) ¿Cuándo llegara a 100000 el número de bacterias?

39) Cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100 y se duplica cada 3 meses.

a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?
b) Estimar la población a un año después de que los conejos fueron introducidos en la isla.
c) Trazar una gráfica de la población de conejos.

40) La cantidad inicial de bacterias en un cultivo es 500. Posteriormente, un biólogo hace un conteo de muestra de bacterias del cultivo y encuentra que la tasa de crecimiento relativa es 40% por hora.

a) Encontrar la ley de una función que modele el número de bacterias después de t horas.
b) ¿Cupál es la cantidad estimada después de $10\ hs$?
c) ¿Cuándo llegará a 80000 la cantidad de bacterias?
d) Trazar la gráfica de la función.

41) Se sirve un tazón de sopa caliente. Empieza a enfriarse de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, de modo que la temperatura T en el tiempo t está dada por:

$$T(t) = 18{,}33 + 80{,}56e^{-0{,}05t}$$

donde t se mide en minutos, y T se mide en grados Celsius.

a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?
b) ¿Cuál es la temperatura después de diez minutos?
c) ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de $37{,}8°C$?

42) En un laboratorio se estudia la concentración de un medicamento en la sangre y se observa que disminuye de forma exponencial siguiendo un modelo similar al de Newton (conocido como eliminación de primer orden). La ley es:

$$C(t) = C_{ext} + (C_0 - C_{ext}).e^{kt}$$

donde C es la concentración en el tiempo t, C_0 la concentración inicial, C_{ext} es el nivel base o concentración externa (que en este caso consideraremos $0\ mg/L$ para simplificar) y k la constante de eliminación.

Un paciente recibe una dosis que eleva su concentración sanguínea a $120\ mg/L$. Se sabe que el cuerpo elimina el fármaco de modo que, pasadas 2 horas, la concentración baja a 90 mg/L.
Considerando la concentración ambiental/base $C_{ext} = 0\ mg/L$ determinar la constante de eliminación k y calcular cuántas horas deben pasar (desde la dosis inicial) para que la concentración llegue a 30 mg/L.

43) Una *curva de aprendizaje* es la gráfica de una función P que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina en función del tiempo t de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye.

Se ha encontrado que la ley $P(t) = M - Ce^{-kt}$ donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

a) Expresar el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.
b) Para un atleta de salto con garrocha en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por la ley $P(t) = 20 - 14e^{-0,024t}$ donde P es la altura (medida en pies) que él es capaz de saltar con garrocha después de t meses. ¿Después de cuantos meses de aprendizaje podrá saltar $12\ pies$?
c) Trazar una gráfica de la curva de aprendizaje para el inciso b).

VI. Modelos logarítmicos

44) Una función logarítmica es una función que tiene como ley

$$f(x) = log_a(x)$$

a) Una restricción para a es que sea mayor que cero y distinto de 1. ¿a qué se deben estas restricciones?
b) Deducir si estas funciones tienen ordenada al origen y/o raíces.
c) Calcular el límite cuando $x \to 0^+$ analizando los valores que toma a.
d) Una forma más general de una función logarítmica es aquella que tiene como ley

$$g(x) = k.log_a(x - h) + c \text{ con } k, h, c \text{ distintos de cero}$$

¿qué características tiene g respecto de f?
e) Probar, utilizando derivadas que la función no tiene puntos críticos y concluir si tiene extremos relativos.

45) En química, la acidez de una sustancia se mide de acuerdo con la concentración $[H^+]$ de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). A esto se lo denomina pH de la sustancia, y a partir de la fórmula establecida por Soren Peter Lauritz Sorensen (1909), con el objetivo de evitar trabajar con números muy pequeños se estableció la siguiente fórmula para calcularlo:

$$pH = -log[H^+]$$

Las soluciones con un pH igual a 7 se denominan *neutras*, aquéllas con pH menor a 7 son *ácidas*, y las que tienen pH mayor a 7 son *básicas*. A continuación, se muestran algunos ejemplos:

Sustancia	pH
Leche de magnesia	$10,5$
Agua de mar	$8 - 8,4$
Sangre humana	$7,3 - 7,5$
Galletitas	$7 - 8,5$
Leche de vaca	$6,4 - 6,8$
Espinaca	$5,1 - 5,7$
Tomate	$4,1 - 4,4$
Naranja	$3 - 4$
Manzana	$2,9 - 3,3$
Limón	$1,3 - 2$
Ácido de batería	1

a) La concentración de iones de hidrógeno de una muestra de sangre humana se midió y resultó ser $[H^{+}] = 0{,}0000000000000000316\ M$. Encontrar su pH y clasificar a la sangre como ácida o básica.
b) La lluvia más ácida que jamás haya ocurrido en Escocia en 1974 tuvo un $pH = 2{,}4$. Encontrar la concentración de iones de hidrógeno.
c) Las concentraciones de iones de hidrógeno en los quesos varían entre $4 \,.\, 10^{-7} M$ y $1{,}6 \,.\, 10^{-5} M$. Encontrar la variación de pH de los quesos.

46) En 1935, el geólogo estadounidense Charles Ritcher definió la magnitud M de un terremoto según la fórmula:

$$M = log\left(\frac{I}{S}\right)$$

donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a $100km$ del epicentro del terremoto, y S es la intensidad de un terremoto *estándar*, cuya amplitud es 1 micrón, es decir $10^{-4}cm$.

a) Calcular la magnitud de un terremoto estándar.
b) El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8,3 en escala Ritcher. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto entre la frontera de Colombia y Ecuador, que fue cuatro veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Ritcher?
c) En 1989, también en San Francisco ocurrió un terremoto que tuvo una magnitud de 7,1 en escala Ritcher. Probar que el terremoto de 1906 fue unas 16 veces más intenso que el de 1989.
d) Si un terremoto es 20 veces más intenso que otro, ¿cuánto más grande es su magnitud en la escala de Richter?

47) Nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de escucha). La sensación psicológica de intensidad varia con el logaritmo de la intensidad (Ley de Weber-Fechner), de modo que el nivel de intensidad B, medido en decibeles, está definido por la ley:

$$B = 10.\,log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

A continuación, algunos ejemplos:

Fuente de sonido	B (en dB)
Despegue de un jet	140
Martillo neumático	130
Concierto de rock	120
Subte	100
Tránsito intenso	80
Tránsito ordinario	70
Conversación normal	50
Susurro	30
Caída de hojas	$10 - 20$
Umbral de escucha	0

a) Hallar el nivel de intensidad en decibeles del motor de un jet durante el despegue, si la intensidad se mide a $100\ W/m^2$.
b) La intensidad del sonido en un tren del subte se midió en $98dB$. Encuentre la intensidad en W/m^2.
c) El ruido de una podadora de motor se midió en $106dB$. El nivel de ruido en un concierto de *rock* se midió en $120dB$. Encuentre la relación entre la intensidad de la música de *rock* y la de la podadora de motor.

Unidad 2
Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones

I. Ecuaciones diferenciales. Generalidades.

1) Clasificar las siguientes ecuaciones según el tipo y el orden:

a) $x.y' + 2xy = 0$ b) $y''' - sen(xy) = x$ c) $u_x + u_{yy} = 0$

d) $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3 + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + 2 = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial t}\right)^3$ e) $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 - x.\frac{dy}{dx} + 5y = 4$ f) $\frac{dy}{dx} + 4xy = 5$

2) Dada la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{x} + y$, se pide:

a) Clasificarla según el orden y según el tipo.
b) Probar que la función de ley $y = x.e^x$ es una solución de esta.
c) ¿Alguna de las siguientes es la solución general de la ecuación? Justificar.

$y = x.e^x + A$ $y = x.e^{x+B}$ $y = Cx.e^x$

d) Hallar la solución particular que pasa por el punto $(1, e^3)$.

II. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones diferenciales a variables separables

3) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales a variables separables:

a) $xdy - y^2dx = 0$ b) $y' = x^2.y^2$ c) $-xe^x dx + ydy = 0$

d) $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$ e) $(1 + x^3)dy - x^2ydx = 0$

4) Determinar para la ecuación diferencial del inciso 3b, si existe alguna solución de la familia de soluciones que contenga al punto $(1; -1)$; es decir si alguna de las soluciones satisface la condición inicial $y(1) = -1$.

5) Determinar para qué valor de m la siguiente ecuación diferencial de primer orden resulta ser a variables separables, y para dicho valor hallar la familia de soluciones:

$$2dy - \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}} + x^m\right)dx = 0$$

6) Modelo de crecimiento de población.

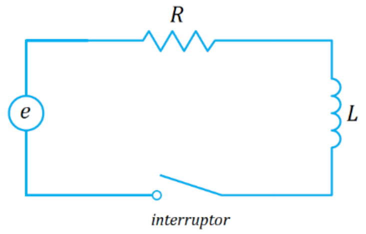
Un modelo para el crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que ésta crece con una rapidez directamente proporcional a su tamaño.

a) Enunciar la ecuación que describe este fenómeno.

b) Suponiendo que la población en el tiempo $t = 0$ fue de 1000 individuos y la tasa de crecimiento es $k = 0{,}2$ determinar la población en cualquier tiempo futuro teniendo en cuenta dichas condiciones iniciales. Interpretar gráficamente.

7) Circuito RL

En un circuito serie compuesto por un resistor (de resistencia R), un inductor (de inductancia L) y una fuente de alimentación que tiene un voltaje $e(t)$, circula una corriente eléctrica cuya intensidad es $i(t)$, cuando se cierra el interruptor/conmutador.



Teniendo en cuenta que:

- La ley de Ohm establece que la diferencia de potencial que cae sobre una resistencia es proporcional a la intensidad de corriente (la constante de proporcionalidad es el valor óhmico R).
- La ley de Faraday establece que la caída de tensión en una inductancia es proporcional a la rapidez de variación de la intensidad de corriente que la circula (la constante de proporcionalidad es el valor del coeficiente L de autoinducción de la inductancia).
- La segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de todas caídas de tensión que se producen en un circuito serie es igual al voltaje provisto por la fuente de alimentación (e).

a) Hallar la ley de intensidad de corriente $i = i(t)$ en un circuito donde la resistencia es $R = 12\Omega$, la inductancia es $L = 4H$, la batería da un voltaje constante de $60V$ y el interruptor cierra el circuito cuando $t = 0$.

b) ¿Cuál es el valor límite de la intensidad de corriente?

8) Población salvaje

La razón de cambio del número de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando se comienza a estudiar el fenómeno, la población es de 300 coyotes, y a los dos años, la población se incrementó a 500. Encontrar la población de coyotes a los tres años.

Ecuaciones diferenciales lineales

9) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{5}x^3$ con $x > 0$

b) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$

c) $y' + y = e^{-x}.sen(x)$

d) $y' + 2xy = 2x$

10) Resolver el inciso 7) a) utilizando ecuaciones diferenciales lineales.

11) La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez del cambio de temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente.

En una investigación policial se encuentra un cuerpo en la habitación de un edificio cuya temperatura ambiente se mantiene constante a $20°C$.

Cuando se toma la temperatura del cuerpo (a las $18{:}00hs$), el mismo tenía una temperatura de $30°C$. Una hora después (a las $19{:}00hs$), la temperatura había descendido a $28°C$.

Se conoce que la temperatura normal de un cuerpo es de $37°C$.

Cuando revisan las cámaras de ingreso al edificio obtienen los siguientes datos:

- El señor A ingresó a las $13hs$ de ese mismo día y se retiró a las $14.15hs$
- El señor$B$ ingresó a las $14.10hs$ de ese mismo día y se retiró a las $14.55hs$
- El señor C ingresó a las $13.30hs$ de ese mismo día y se retiró a las $15.15hs$
- El señor D ingresó a las $15.15hs$ de ese mismo día y se retiró a las $16.05hs$
- El señor E ingresó a las $16hs$ de ese mismo día y se retiró a las $16.55hs$

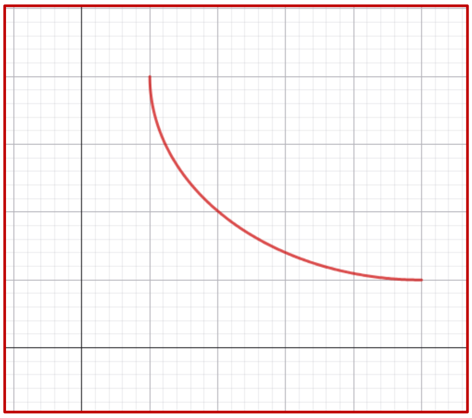
¿Cuál es el mayor sospechoso del crimen?

Ecuaciones diferenciales lineales

12) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales del tipo Clairaut:

a) $y = xy' - (y')^2$ b) $-y'x + y = \ln(y')$ c) $y = (y')^3 + y'x$

13) Imaginemos para $x > 0$, que existe una función de ley $y = f(x)$ cuya gráfica tiene la siguiente forma (esto es esquemático, porque en realidad, justamente lo que vamos a hacer es tratar de encontrar a esa curva):



Como esta curva tiene infinitos puntos, pensemos que, en cada uno de esos puntos, se podrá trazar una recta tangente a la curva. En la siguiente figura mostramos algunas de dichas rectas:

Cada una de esas rectas, junto a los dos ejes coordenados, delimitan distintos triángulos. Se quiere hallar cuál es la curva que hace que esos triángulos siempre tengan área constante igual a 2.

III. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a coeficientes constantes

Ecuaciones diferenciales de segundo orden a coeficientes constantes homogéneas

14) Encontrar la solución general de las siguientes EDO de orden dos a coeficientes constantes homogéneas:

a) $y'' + 6y' + 9y = 0$ b) $y'' + 4y = 0$ c) $y'' - y' = 0$

d) $y'' - 4y' + 3y = 0$ e) $y'' - 2y' + y = 0$ f) $y'' - 4y' + 13y = 0$

15) Movimiento de un resorte.

Consideremos un objeto de masa M, fijado a un extremo de un resorte indeformable, de constante de elasticidad k, cuyo otro extremo está fijado a una pared, y el mismo se desliza horizontalmente sobre el piso.

La masa está inicialmente en reposo y el resorte no está estirado.

Supongamos que por algún medio la masa se desplaza a una distancia x_0 en sentido positivo, desde el origen y se la suelta libremente con una rapidez inicial v_0. Encontrar un modelo matemático que describa la posición de la masa M una vez que es soltado.

Sugerencia: Utilizar la segunda ley de Newton.

Unidad 3
Aplicaciones en la economía

I. Funciones de demanda

Se llama *función de demanda* a la relación que muestra cómo varía la cantidad q de bienes o servicios que los consumidores están dispuestos y tienen la capacidad de adquirir, a diversos precios p de mercado, en un determinado tiempo específico.

Es decir, a una función cuya ley tiene la forma $q = q(p)$.

Notemos que es lógico pensar que el comportamiento habitual será que, a mayor precio del producto o servicio, la demanda será menor (pues a los consumidores les conviene adquirir el producto o servicio mientras más barato cueste), y viceversa. Con lo cual, q será como regla general, una función *decreciente* en su dominio.

1) La función cuya ley es $q(p) = 280000 - 35p$ es una función de la demanda que expresa la cantidad demandada q de un producto como una función del precio p del producto, en dólares. Determinar el dominio restringido a la situación y el conjunto imagen.

2) Una asociación de productos lácteos local contrata la ayuda de una empresa de investigación de mercados para pronosticar la demanda de leche. La empresa de investigación encuentra que se puede pronosticar la demanda de leche local mediante la ecuación $q = -4000p + 10000$ donde p representa el precio por litro (en dólares) y q representa el número pronosticado de litro comprados por semana.

a) Determinar el dominio adecuado en el contexto del problema.
b) Identificar la pendiente y la ordenada al origen.
c) Interpretar el significado de la pendiente y la ordenada al origen en esta aplicación.

3) Una función precio-demanda tiene como ley $q = 300 - \frac{1}{2}x$. Se pide:

a) ¿Para qué precio la demanda es de 16 unidades?
b) ¿Qué cantidad demandada se logra si el precio se encuentra a 160 unidades de precio?

4) Hallar la ley de una función de demanda sabiendo que el precio disminuye linealmente con la cantidad demandada, que cuando el precio es de $100U\$S$ no hay ningún demandante, y que el interés de demanda aumenta en una unidad cuando el precio disminuye $3U\$S$.

5) Encontrar la ley de una función de precio-demanda sabiendo que el precio disminuye linealmente con la cantidad demandada y se han obtenido los siguientes datos:

q	p
50	0
40	10
30	20

6) La función de demanda de un producto determinado tiene como ley:

$$q(p) = p^2 - 90p + 2025 \qquad \text{con } 0 \leq p \leq 45$$

donde $[q] =$ unidades $\qquad$ $[p] = U\$S$

a) ¿Qué tipo de función es?
b) ¿Cuántas unidades se demandarán a un precio de $30U\$S$?
c) ¿Para qué precio la demanda será de 144 unidades?
d) ¿Qué precio/s dará/n como resultado una demanda cero del producto?

7) La función de demanda para un producto particular tiene como ley la siguiente:

$$q(p) = p^2 - 70p + 1225$$

a) Investigar cuál es la cantidad demandada si el precio es de 10 unidades de precio.
b) Investigar para qué cantidad demandada se elimina la demanda del producto.
c) Determinar el dominio adecuado para este caso.

8) En teoría económica, la función de demanda se define naturalmente como una relación en la que la cantidad demandada depende del precio, es decir, $q = q(p)$. Sin embargo, es habitual trabajar con su función inversa, $p = p(q)$, cuando se debe mostrar la relación gráfica entre las variables que intervienen.

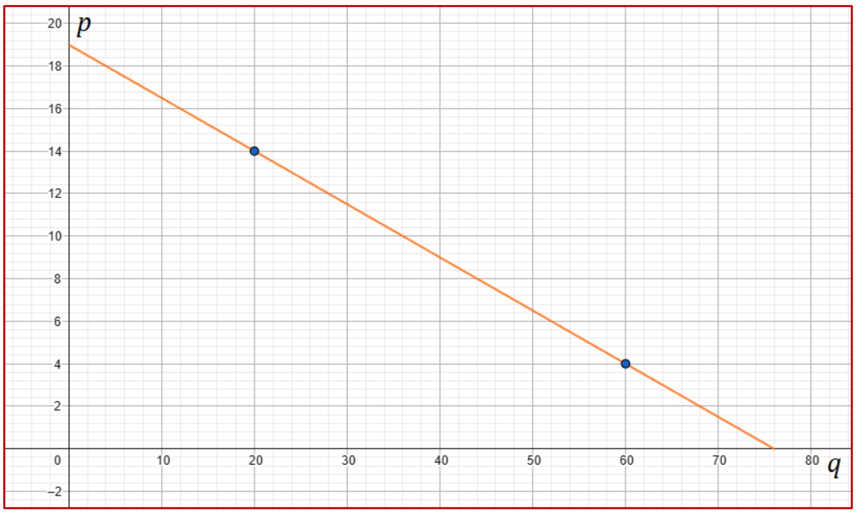
Esta elección no implica un cambio conceptual en la relación económica, sino una reexpresión de la misma. La utilización de la forma inversa responde principalmente a dos razones:

- Por un lado, permite interpretar el precio como la disposición a pagar de los consumidores por cada nivel de cantidad, lo cual resulta fundamental en el análisis económico.
- Por otro lado, facilita la representación gráfica habitual en economía, donde la cantidad se ubica en el eje horizontal y el precio en el eje vertical. Pero sobre todo porque posteriormente será necesario definir otras funciones componiendo con la función de demanda, pero tomando como variable el precio (esto se verá más adelante).

En consecuencia, ambas expresiones contienen la misma información, pero la forma inversa resulta más conveniente para el análisis y la interpretación económica.

Hallar la ley de la inversa $p = p(q)$ del caso de la actividad 3) y realizar su gráfica.

9) Deducir la ley de la función demanda de la forma $q = q(p)$ si la gráfica de la situación es la siguiente:



II. Funciones de oferta

Se llama *función de oferta* a la relación que muestra cómo varía la cantidad q de bienes o servicios que los productores o vendedores están dispuestos a disponer para la venta, a diversos precios p de mercado, en un determinado tiempo específico.

Es decir, a una función cuya ley tiene la forma $q = q(p)$.

Notemos que es lógico pensar que el comportamiento habitual será que, a mayor precio del producto o servicio, la oferta será mayor (pues a los productores les conviene ofrecer el producto o servicio mientras más caro se pueda vender), y viceversa. Con lo cual, q será como regla general, una función *creciente* en su dominio.

10) Un economista cree que hay una relación lineal entre el precio de mercado de una mercancía particular y el número de unidades que los proveedores de la mercancía están dispuestos a comercializar.

Dos observaciones de muestra indican que cuando el precio es igual a 15 $U\$S$ por unidad, la oferta semanal es de 30000 unidades, y cuando el precio equivale a 20 $U\$S$ por unidad, la oferta semanal es de 48000 unidades.

a) Si se traza el precio por unidad p en el eje de las abscisas y la cantidad ofrecida, q, se traza en el eje de las ordenadas, determinar la ley $q = q(p)$.
b) Interpretar la pendiente de la ley en esta aplicación.
c) Pronosticar la oferta semanal si el precio en el mercado equivale a 25 $U\$S$ por unidad.

11) La siguiente ley es la de una función de oferta donde q es igual al número de unidades vendidas y p equivale al precio de venta.

$$q(p) = 0{,}5p^2 - 200$$

a) ¿Qué tipo de función es ésta?
b) ¿Qué cantidad se debería entregar si el precio de mercado es $30? ¿$50?
c) ¿Qué precio daría como resultado 0 unidades llevadas al mercado?

12) Se sabe que una función de oferta sigue un modelo cuadrático, es decir, un modelo cuya ley tiene la forma:

$$q(p) = ap^2 + bp + c$$

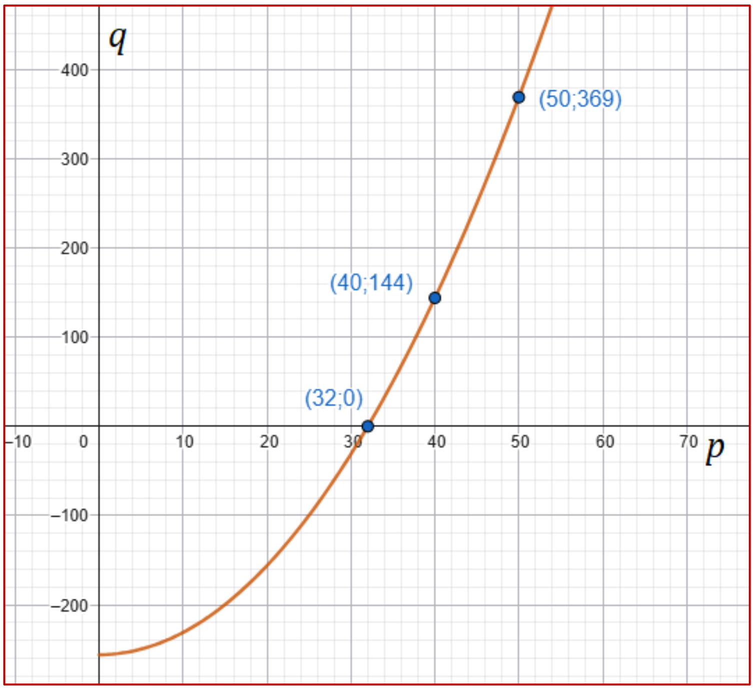
Si se conoce que:

- A un precio de 20 $U\$S$ se tiene una oferta nula del producto,
- A un precio de 30 $U\$S$ se tiene una oferta de 250 unidades,
- A un precio de 40 $U\$S$ se tiene una oferta de 600 unidades,

Hallar la ley de oferta para este caso.

13) Al igual que con la función demanda, a la hora de representar gráficamente una función de oferta, se suele trabajar con la función inversa $p = p(q)$. Realizar la gráfica de la función de oferta del inciso 10).

14) La siguiente es la representación gráfica de una función de oferta de ley $q = q(p)$ que sigue un modelo cuadrático:



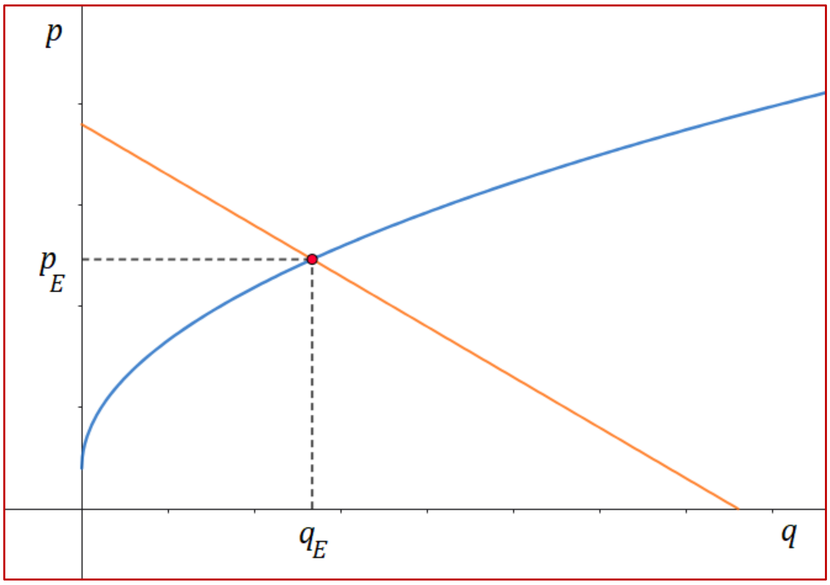
Hallar la ley y la gráfica de la función de oferta $p = p(q)$.

15) Si una función de oferta tiene como ley $q(p) = \frac{1}{2}p^2 + 3x$, se pide:

Hallar la ley de la función inversa $p = p(x)$ y graficarla.

III. Precio de equilibrio

El punto de equilibrio entre la demanda y la oferta es el punto en el que ambas funciones se intersecan. En ese nivel de precio, los consumidores desean comprar exactamente la misma cantidad que los productores desean vender, por lo que no existen ni excedentes (exceso de oferta) ni faltantes (exceso de demanda), y el mercado se encuentra en equilibrio. Gráficamente:



16) Para cierto artículo X la función de demanda en cierta población viene dada por la ecuación $q(p) = 12 - 2p$ y la función de oferta viene dada por la ecuación $q(p) = 20p$.

a) Encontrar las leyes de las funciones de demanda y oferta con variable dependiente p.
b) Hallar el precio y la cantidad de equilibrio.
c) Graficar.

17) Las funciones de oferta y demanda de un determinado bien, vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$O)\ q(p) = 10 + 14p \qquad\qquad D)\ q(p) = 300 - 15p$$

a) Determinar el precio y la cantidad de equilibrio.
b) Graficar ambas curvas en un mismo sistema. Recordar hallar previamente las inversas.
c) ¿Qué ocurre en el mercado para un precio de $p = 6$?
d) ¿Qué ocurre en el mercado para un precio de $p = 12$?

18) Las funciones de oferta y demanda de un determinado bien, vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$O)\ q(p) = 25 + 20p \qquad\qquad D)\ q(p) = 200 - 5p$$

a) Determinar el precio y la cantidad de equilibrio.
b) Graficar ambas curvas en un mismo sistema. Recordar hallar previamente las inversas.
c) ¿Qué ocurre en el mercado para un precio de $p = 5$?

19) Las funciones de oferta y demanda de un determinado bien, vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$D)\ q(p) = \frac{100}{p} \qquad\qquad O)\ q(p) = 4p$$

a) Determinar el precio y la cantidad de equilibrio.
b) Graficar ambas curvas en un mismo sistema. Recordar hallar previamente las inversas.
c) Calcular el nuevo precio de equilibrio si la demanda aumenta al doble.

IV. Costos, ingresos y ganancia

Sea la función de demanda dada por $p = p(q)$, se definen las siguientes funciones que dependen de la variable q (es decir de la cantidad de artículos que se está dispuesto a comprar en cierta población, en cierto período de tiempo).

Función **Costo**: $C(q) = a + bq$

Es el costo por producir q artículos. Notemos que tiene una parte constante y una parte variable (que varía de acuerdo con la cantidad de artículos que se producen), llamados costos fijos y costos variables, respectivamente.

Función **Ingreso**: $I(q) = q.p(q)$

Es la función que se obtiene al multiplicar la cantidad de unidades por la función precio.

Función **Ganancia**: $G(q) = I(q) - C(q)$

Es la resta entre el ingreso y los costos por producir y vender q artículos.

20) La función de demanda de un parlante durante el verano en un pueblo cercano a la playa viene dado por la función de ley:

$$q(p) = -0{,}004p + 100 \qquad \text{con} \qquad 0 \leq p \leq 25000$$

a) Si a una empresa que produce estos artículos cada uno de ellos les cuesta $\$4000$ producirlos, y un costo fijo de $\$10000$, escribir la ley de la función costo, la función ingreso y la función ganancia.

b) Determinar la utilidad o ganancia que posee la empresa si se venden 35 parlantes.

c) Graficar la función ganancia y determinar a partir de qué cantidad de unidades el vendedor comienza a obtener utilidad.

21) La función de demanda de un artículo viene dado por:

$$p(q) = 37{,}5 - 0{,}125q \quad \text{con} \quad q > 0$$

a) Si a una empresa que produce estos artículos cada uno de ellos les cuesta $U\$S\ 30$ producirlos, y un costo fijo de $U\$S\ 100$, escribir la ley de la función costo, la función ingreso y la función ganancia.

b) Determinar la utilidad o ganancia que posee la empresa si se venden 12 artículos.

c) Graficar la función ganancia y determinar a partir de qué cantidad de unidades el vendedor comienza a obtener utilidad.

V. Aplicaciones de la derivada en la economía

Se llaman:

Costo marginal: a la tasa de variación del costo C de producción respecto del número q de cantidades producidas. Es útil para determinar qué costo adicional se tiene si se agrega una unidad de producción.

$C'(q_0)$ aproxima el costo de producir la unidad número $(q_0 + 1)$.

Ingreso marginal: a la tasa de variación del ingreso I respecto del número q de cantidades vendidas. Es útil para determinar qué ingreso adicional se tiene si se vende una unidad más.

$I'(q_0)$ aproxima el ingreso por vender la unidad número $(q_0 + 1)$.

22) Un fabricante estima que, al producir q unidades de un bien de consumo, el costo total estará dado por la ley:

$$C(q) = \frac{1}{8}q^2 + 3q + 98$$

donde $[C]$ se mide en miles de pesos argentinos, y que se venderán todas las unidades que posee si el precio que pone tiene como ley:

$$p(q) = \frac{1}{3}.(75 - x)$$

midiendo p en miles de pesos por unidad.

a) Encontrar las leyes de las funciones costo e ingreso marginal.
b) Estimar el costo marginal al producir la novena unidad.
c) ¿Cuál es el costo real de producir la novena unidad?
d) Estimar el ingreso marginal al vender la novena unidad.
e) ¿Cuál es el ingreso real al vender la novena unidad?

23) Una empresa produce cierta cantidad q de unidades de un determinado bien. Su función costo total viene dada por la ley:

$$C(q) = 500 + 20q + 0{,}5q^2$$

a) Determinar la ley de la función costo marginal.
b) Calcular $C'(10)$.
c) Explicar cómo se interpreta el valor anterior.
d) Calcular el valor verdadero de dicha variación.

24) Una empresa tiene la siguiente función de demanda:

$$p(q) = 100 - 2q$$

a) Determinar la ley de la función ingreso total.
b) Hallar la ley de la función ingreso marginal.
c) Calcular el ingreso marginal cuando se venden 15 unidades.
d) Explicar el significado del cálculo anterior.
e) Verificar la aproximación anterior utilizando la función ingreso total.

25) Una empresa tiene la siguiente función de demanda:

$$p(q) = \frac{80 - q}{4}$$

donde q es el número de unidades, y p el precio por unidad en dólares.

Determinar el número de unidades que debe venderse para que el ingreso sea mínimo y para que sea máximo.

26) Una empresa estima que el costo (en pesos argentinos) de producción de q unidades viene dado por la ley:

$$C(q) = 800 + 0{,}04q + 0{,}0002q^2$$

Hallar el nivel de producción que hace mínimo el costo medio por unidad.

Nota: El costo medio por unidad viene dado por $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$.

VI. Aplicaciones de la integral en la economía

Se llaman:

Excedente del consumidor: a la ganancia o beneficio extra que obtienen los consumidores por pagar un precio menor al que estaban dispuestos a pagar.

Es decir, la curva de demanda muestra el precio que los consumidores están dispuestos a pagar y esto se obtiene del precio de equilibrio (p_E) y la cantidad de equilibrio (q_E). El mercado fija un precio menor a p_E. La diferencia entre ellos es el excedente del consumidor: EC.

Se calcula:

$$EC = \left[\int_0^{q_E} p(q).dq\right] - p_E.q_E$$

donde $p(q)$ es la función de demanda.

Gráficamente, se entiende como el área comprendía entre la curva de demanda y el precio del mercado.

Excedente del vendedor: a la ganancia o beneficio extra que obtienen el productor o vendedor por vender a un precio mayor al mínimo que estaban dispuestos a vender.

Se calcula:

$$EV = p_E.q_E - \left[\int_0^{q_E} p(q).dq\right]$$

donde $p(q)$ es la función de oferta.

Gráficamente, se entiende como el área comprendía entre el precio del mercado y la curva de oferta.

27) Supongamos que las ecuaciones de la demanda y oferta de cierto producto vienen dadas por las siguientes leyes:

$$D)\ p(q) = 100 - 2q \qquad\qquad O)\ p(q) = 20 + q$$

a) Hallar el precio y cantidad de equilibrio.
b) Determinar el excedente del consumidor.
c) Determinar el excedente del vendedor.

28) Supongamos que las ecuaciones de la demanda y oferta de cierto producto vienen dadas por las siguientes leyes:

$$D)\ p(q) = 100 - q^2 \qquad\qquad O)\ p(q) = 52 + 2q$$

a) Hallar el precio y cantidad de equilibrio.
b) Determinar el excedente del consumidor.
c) Determinar el excedente del vendedor.

29) El costo marginal de una empresa viene dado por la ley $C'(q) = 4q + 10$ con un costo fijo de $200\ U\$S$. Se pide:

a) Hallar la ley de la función costo total $C = C(q)$.
b) Calcular el costo total cuando se producen 5 unidades.
c) Interpretar el término constante de la función obtenida.

30) El costo marginal de una empresa viene dado por la ley $C'(q) = 6q + 2$.

Se sabe además que el costo medio por unidad cuando $q = 2$ es igual a 14.

a) Hallar la ley de la función costo total $C = C(q)$.
b) Verificar que se cumple la condición dada.
c) Hallar cuál es el costo fijo.

30) El ingreso marginal de una empresa viene dado por la ley $I'(q) = 120 - 3q$. Se conoce además que cuando no se vende ninguna unidad, el ingreso total es cero.

a) Hallar la ley de la función ingreso total $I = I(q)$.
b) Determinar el ingreso cuando se venden 20 unidades.
c) ¿Para qué valor de q el ingreso es máximo?

31) El ingreso marginal de una empresa viene dado por la ley $I'(q) = 50 - q^2$. Se conoce además que $I(1) = 30$.

a) Hallar la ley de la función ingreso total $I = I(q)$.
b) Determinar el ingreso cuando se venden 3 unidades.
c) Hallar para qué valores de q el ingreso marginal es positivo e interpretar el resultado.

VII. Econometría – Análisis de regresión lineal

32) Se observa la siguiente relación entre la cantidad demandada de un producto y el precio al que se estaría dispuesto pagar:

Precio (p)	Cantidad (q)
10	80
20	70
30	50
40	10

a) Suponer un modelo lineal para $q = q(p)$ y hallar una aproximación utilizando el método de los cuadrados mínimos.
b) Interpretar el signo de la pendiente.
c) Estimar la cantidad demandada cuando $p = 25$

33) Se observa la siguiente relación entre la cantidad ofertada de un producto y el precio al que se estaría dispuesto a vender:

Precio (p)	Cantidad (q)
10	120
20	100
30	70

a) Suponer un modelo lineal para $q = q(p)$ y hallar una aproximación utilizando el método de los cuadrados mínimos.
b) Interpretar el signo de la pendiente.
c) Estimar la cantidad ofertada cuando $p = 45$.

34) Se muestra la demanda de energía eléctrica en la ciudad de Puerto Montt, durante el año 2018 al 2024, en kilowatts. El jefe de operaciones de la empresa SAESA, debe pronosticar la demanda para el 2025 ajustando a una recta de tendencia estos datos. Hacerlo:

Año	Demanda
2018	74
2019	79
2020	80
2021	90
2022	105
2023	142
2024	122

Unidad 4
Campos escalares y sus aplicaciones

I. Funciones de varias variables

Ya hemos estudiado en unidades anteriores, funciones de una variable cuyas leyes tienen la forma $f = f(x)$. A partir de ahora, estudiaremos *campos escalares*, que son funciones cuyas leyes tienen la forma $f = f(\bar{r})$ donde $\bar{r}$ es un vector o punto que tiene n componentes o coordenadas. Por lo que la notación será:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,/\, \bar{r} \in A \mapsto f(\bar{r}) \in \mathbb{R}$$

1) Determinar el dominio de definición de los campos escalares cuyas leyes se dan a continuación y graficar dichos conjuntos en el espacio correspondiente:

a) $f(x;y) = x^2 + y$

b) $f(x;y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1}$

c) $f(x;y) = \frac{2-x+y}{x^2-4x+y^2}$

d) $f(x;y) = arsen(x+y)$

e) $f(x;y) = \frac{4}{x.y}$

f) $f(x;y) = \sqrt{x-3} + \sqrt[4]{y+1}$

g) $f(x;y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{2x}$

h) $f(x;y) = \ln(y - x^2) + \frac{1}{x^2+(y-3)^2}$

i) $f(x;y;z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(2-z)$

j) $f(x;y;z) = 2^{x+y-z} + \sqrt{z}$

2) El área de un trapecio isósceles puede modelizarse como una función de varias variables.

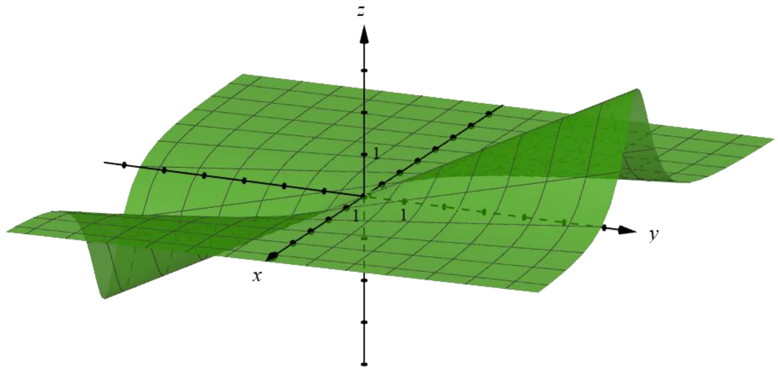
a) Definir las variables independientes.
b) Dar su ley.
c) Escribir su dominio de acuerdo con el contexto del problema.
d) Mostrar mediante un ejemplo que esta función no es inyectiva.
e) Interpretar geométricamente lo anterior.
f) Plantear la ley de la función perímetro. ¿es también un campo escalar?

3) Determinar si las siguientes magnitudes tienen como leyes las de funciones escalares o campos escalares (o ambas). Para el segundo caso, especificar de cuántas variables son.

a) El perímetro de un triángulo equilátero.
b) El área de un triángulo equilátero.
c) El área de un círculo.
d) El volumen de un cilindro circular recto.
e) La forma más usual de determinar la sensación térmica de una zona geográfica en un determinado momento.

4) La altura en metros de un terreno varía según la posición $(x;y)$ en la que una hormiga se pose según la ley:

$$f(x;y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{1+x^2}$$



Supongamos que una hormiga se encuentra en el origen de coordenadas.

a) Justificar por qué la hormiga puede desplazarse libremente hacia cualquier punto, sin caer en ningún agujero en el terreno.
b) Si la hormiga debe comenzar a moverse con la condición de no modificar la altura en la que se encuentra, mostrar que esto únicamente es posible haciéndolo en trayectoria recta y decir de qué trayectoria se trata.
c) ¿Con qué conceptos se relacionan los incisos a y b?
d) En cierto momento, la hormiga comienza a moverse de tal manera que se encuentra a la altura del punto $(0; 2)$ del plano xy.

i) ¿a qué altura se encuentra?
ii) si quiere moverse siempre manteniéndose a esa altura, ¿por qué curva lo debe hacer?
iii) proponer una parametrización para la trayectoria del inciso ii.

II. Límite y continuidad de funciones de dos variables

5) Se tiene el campo escalar cuya ley es

$$f(x;y) = \frac{(y-1).x}{y-x}$$

a) Calcular para f el límite cuando $(x;y) \to (0;0)$ por las siguientes trayectorias y establecer una conclusión si es posible:

i) el eje x ii) la curva de ecuación $y = -x$

b) ¿Cuándo se dice que un campo escalar g de dos variables es continuo en un punto $(a;b)$?

c) Sea el campo de ley:

$$g(x;y) = \begin{cases} f(x;y) & si\ x \neq y \\ 4 & si\ x = y \end{cases},$$

entonces g es discontinuo en $(0;0)$. ¿por qué? ¿qué tipo de discontinuidad tiene? Justificar.

6) Sea el campo escalar cuya ley es:

$$f(x;y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

a) Calcular el límite de f cuando $(x;y) \to (1;1)$ por las trayectorias:

i) $y = 1$ ii) $y = x^2$

b) ¿puede decirse entonces que el mismo no existe?

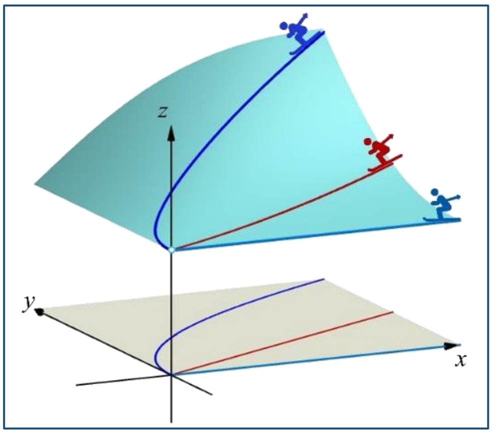
c) Analizar la continuidad de f en $(1;1)$.

7) Tres esquiadores parten de tres puntos distintos sobre una montaña que sigue la forma de la superficie de ecuación:

$$f(x;y)=\frac{xy^3+8.(x^2+y^2)}{4x^2+4y^2}$$

Toman distintos caminos con el objetivo de llegar al mismo punto $(0;0;h)$. Cada uno de estos caminos sobre la superficie están guiados por sus proyecciones sobre el plano xy como se muestran en la figura, las cuáles son:

a) el eje x b) la recta $2y=x$ c) la parábola $x=y^2$



Probar utilizando límites de un campo escalar, que todos culminan en la misma posición $(0;0;h)$.

III. Derivada de funciones de dos variables

8) Dado un campo escalar cuya ley es $f=f(x;y)$, se pide:

a) Escribir la expresión por definición de la derivada de f en la dirección y sentido dados por un versor $\bar{a}=(a_1;a_2)$ en el punto $(x_0;y_0)$.

b) Aplicar la definición anterior para calcular la derivada del campo escalar de ley $f(x;y)=x+y^2$ en dirección y sentido del vector $\bar{h}=(5;12)$ en el punto $(1;2)$.

9) Dado un campo escalar cuya ley es $f=f(x;y)$, se pide:

a) Escribir la expresión por definición de la derivada de f en la dirección y sentido dados por los versores $\bar{\imath}$ y $\bar{\jmath}$ de la base canónica.

b) ¿qué nombre particular reciben las derivadas anteriores?

c) Aplicar la definición anterior para calcular las derivadas del campo de ley $f(x;y)=x+y^2$ en dirección y sentido de los dos versores fundamentales en el punto $(1;2)$.

10) Sea el campo escalar de ley $f(x;y)=x^2y^3+e^{3x+y^2-7}$, se pide:

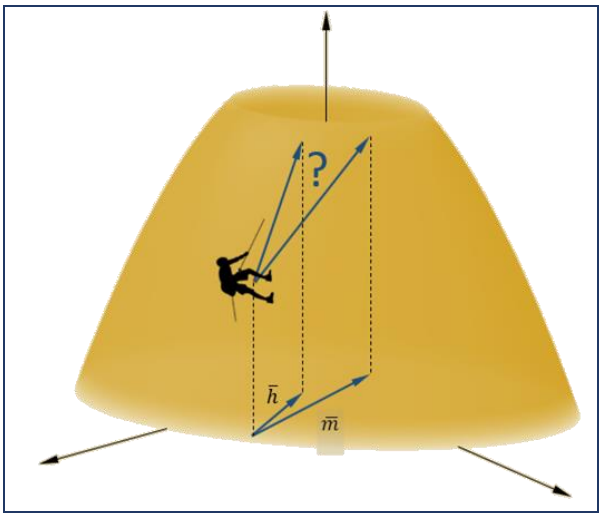
a) ¿Qué es el vector gradiente de un campo escalar de dos variables?

b) Hallarlo para el campo dado, en un punto genérico $(x;y)$.

c) Hallarlo particularmente en el punto $(2;1)$.

11) Recordar cuál es la interpretación geométrica de la expresión $D_{\bar{a}}f(x_0; y_0)$.

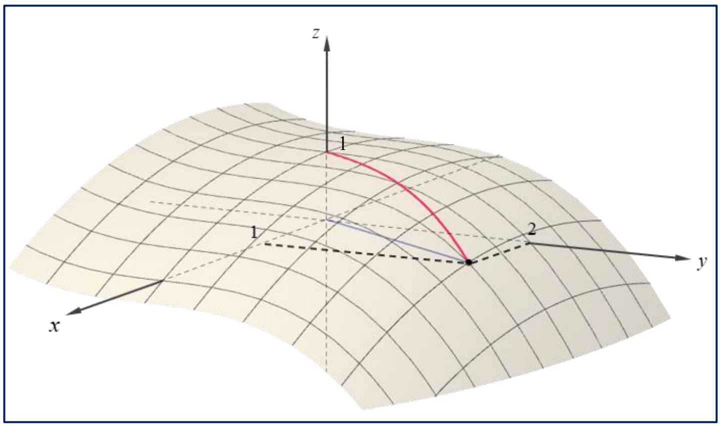
12) Un hombre está escalando una montaña, cuya altura en cierto sector, puede modelizarse a partir de la ecuación $z = 4 - (x^2 + xy + y^2)$. Cuando llega al punto $(1{,}2; 0{,}5; 1{,}71)$ se topa con una bifurcación que le ofrece dos caminos posibles: tomar la dirección y sentido dados por el vector $\bar{h} \to (-1; -1)$ o los dada por $\overline{m} \to (-3; -1)$. Determinar por qué camino realizaría menor esfuerzo.



13) Se tiene la superficie de ecuación:

$$z = -\frac{1}{9}(x^2 + y^3) + 1$$

Una partícula se encuentra ubicada en el punto $P(1; 2; 0)$ y se comienza a desplazar por la trayectoria marcada con color fucsia hacia el punto $Q(0; 0; 1)$.



Determinar el ángulo con el que comienza a desplazarse la partícula.

IV. Diferenciabilidad de funciones de dos variables

14) Supongamos que conocemos que un campo f de dos variables es diferenciable en un punto $(x_0; y_0)$.

a) Por definición, ¿qué significa lo anterior?
b) Como consecuencia, necesariamente f es derivable en $(x_0; y_0)$. Probarlo.
c) A partir de lo anterior, puede probarse que cualquier derivada puede calcularse con la fórmula:

$$D_{\bar{a}}f(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot \bar{a}$$

Probarlo.

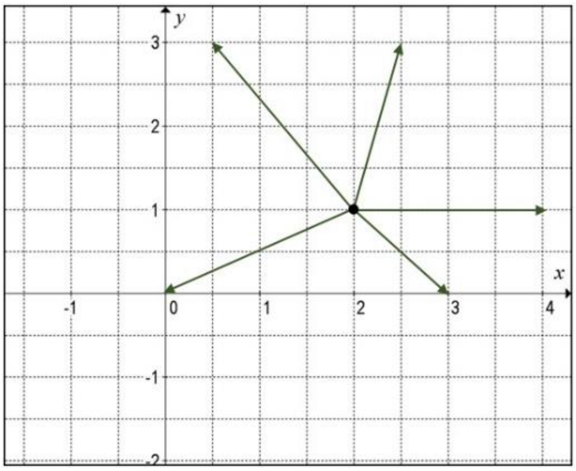
15) Volver a realizar las actividades 9c, 12 y 13 pero ahora aplicando esta forma de cálculo.

16) Analizar desde lo obtenido en 14c cuáles son los valores mínimos y máximos que pueden obtenerse en el cálculo de una derivada.

17) Un hombre se encuentra ubicado en el punto $P(2; 1)$ respecto de un sistema de referencias en el plano xy. La temperatura del ambiente en $°C$, es función de la posición en el plano, según la fórmula:

$$T(x; y) = \frac{40}{x^2+y^2}$$

En su posición actual la temperatura es de $8°C$. ¿En cuáles de las siguientes direcciones y sentidos le conviene moverse para que la temperatura crezca lo más rápido posible?

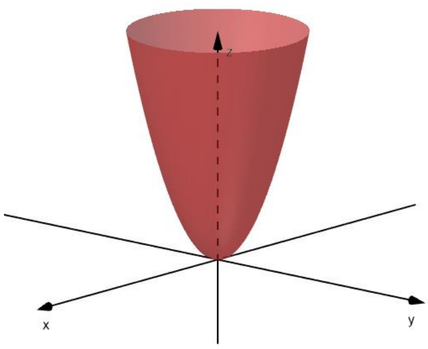


18) Una mosca se encuentra en una habitación rectangular en donde se ha liberado un tóxico. El nivel de toxicidad en cada punto de la habitación viene dado por la ecuación:

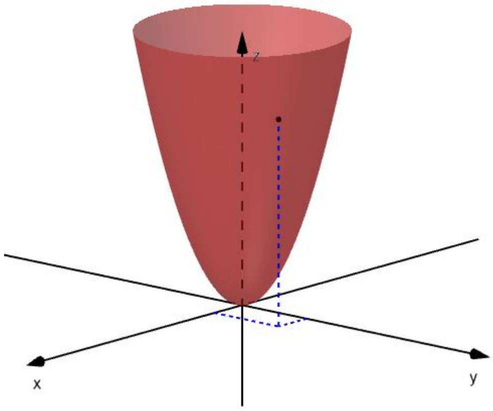
$$T(x; y; z) = x^2.(y-1)^2.(z-3)^2 + 2z^2$$

Si la mosca está posicionada en el punto $P(3; 1; 1)$, demostrar que le conviene dejarse caer en picada para evitar la intoxicación.

19) Supongamos que tenemos el campo escalar cuya ley es $f(x; y) = x^2 + y^2$. Sabemos que su gráfica es la siguiente superficie (paraboloide circular con vértice en el origen y eje de simetría z):



Si consideramos por ejemplo el punto $(1; 2)$ en su dominio, al ser $f(1; 2) = 5$ entonces el punto $(1; 2; 5)$ pertenece a la superficie:

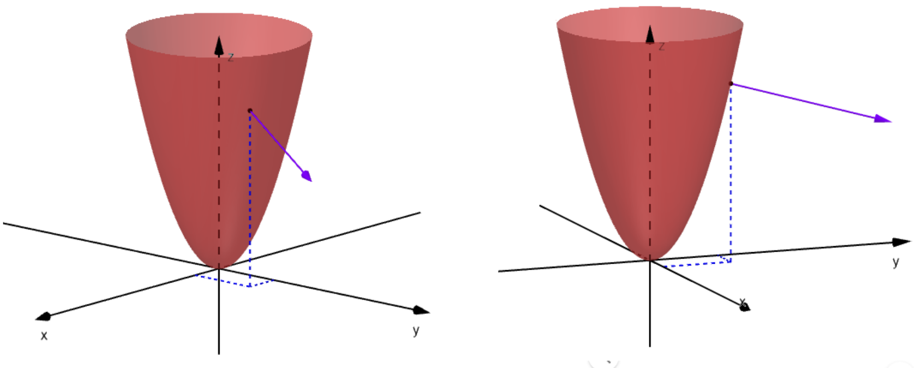


Si consideramos un campo escalar F de tres variables, de quién la superficie anterior es una superficie de nivel, una ley posible para el mismo es:

$$F(x; y; z) = x^2 + y^2 - z$$

a) ¿Cómo se interpretaba geométricamente al vector $\nabla F(1; 2; 5)$?

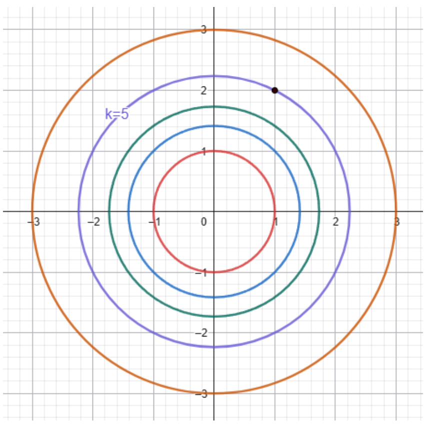
$$\nabla F(x; y; z) = (2x; 2y; -1)$$
$$\nabla F(1; 2; 5) = (2; 4; -1)$$



Ahora bien, recordemos que, a un campo escalar de dos variables, le podíamos calcular su mapa de nivel (curvas de nivel).

b) Deducir sus ecuaciones y graficarlas.

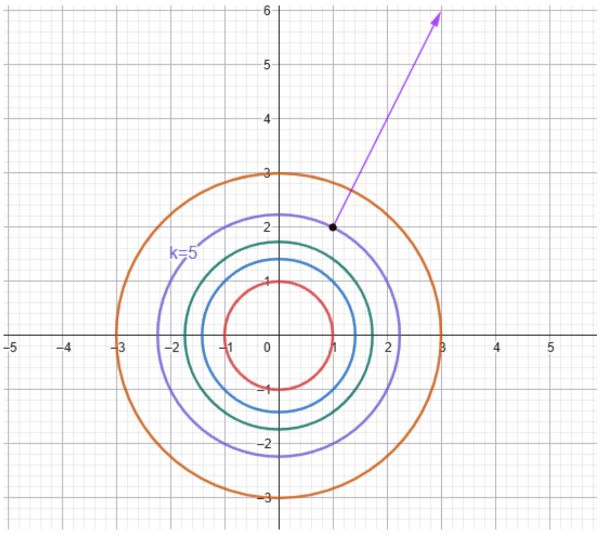
c) Vamos a concentrarnos en particular en aquélla que contiene al punto $(1; 2)$. ¿Cuál es?



Si calculamos ahora el gradiente del campo f de dos variables y en particular en el punto destacado, obtenemos:

$$\nabla f(x;y) = (2x;2y)$$
$$\nabla f(1;2) = (2;4)$$

Vamos a graficar dicho vector en el mapa de niveles:

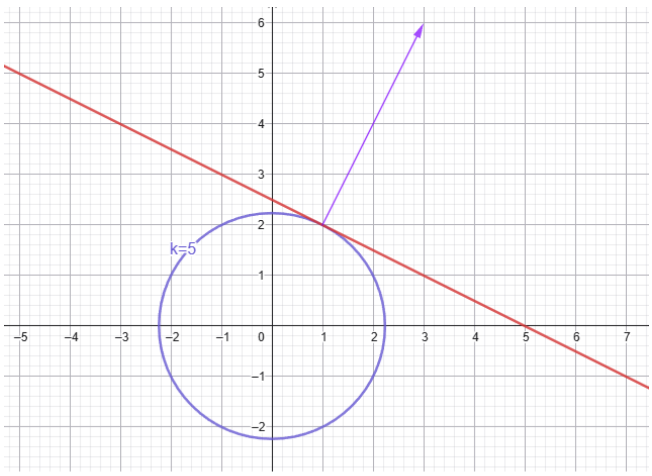


Cabe preguntarse ahora, ¿ese vector resulta perpendicular a la curva de nivel que pasa por el punto $(1;2)$? Para responder a esta cuestión vamos a ayudarnos de la recta tangente a la curva de nivel en el punto considerado.

d) Probar que la misma es:

$$y = -\frac{1}{2}.(x-1)+2$$

Graficamos dicha recta:



Busquemos ahora, la forma general de la misma:

$$\frac{1}{2}x + y - \frac{5}{2} = 0$$

Si recordamos, esta forma nos otorga como información un vector $\bar{n}$ que es perpendicular a la recta.

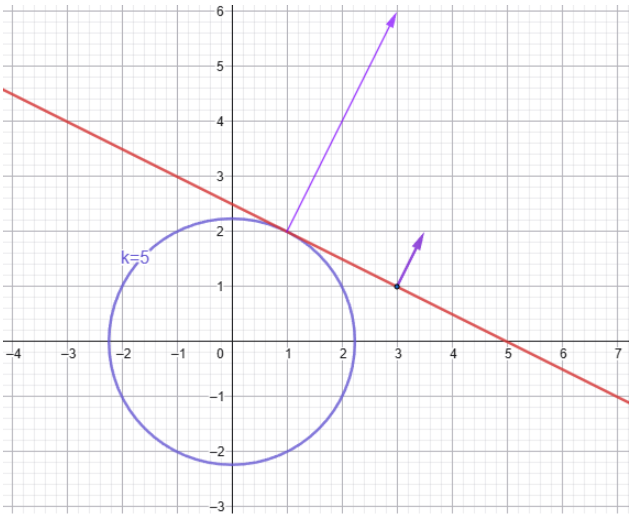
En este caso, es el vector:

$$\bar{n} \rightarrow \left(\frac{1}{2};1\right)$$

Recordemos que el gradiente era el vector $\nabla f(1;2) = (2;4)$.

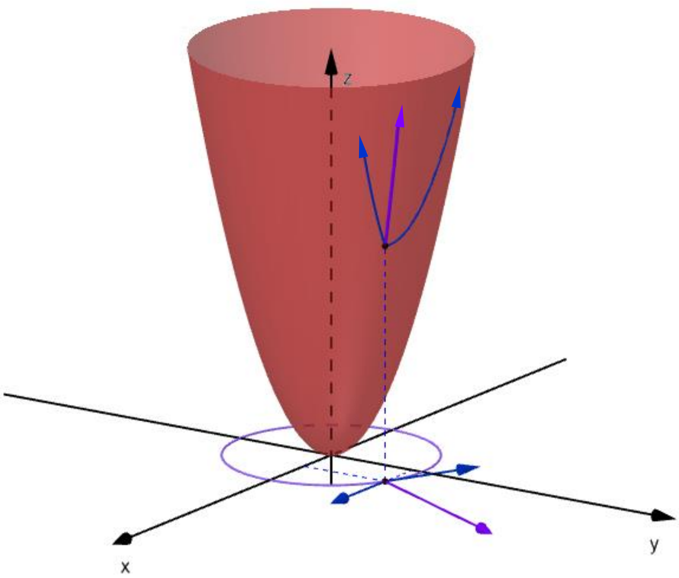
e) Analizar la posición entre los vectores $\nabla f(1;2)$ y $\bar{n}$.

Por lo que ambos, tienen las siguientes posiciones:



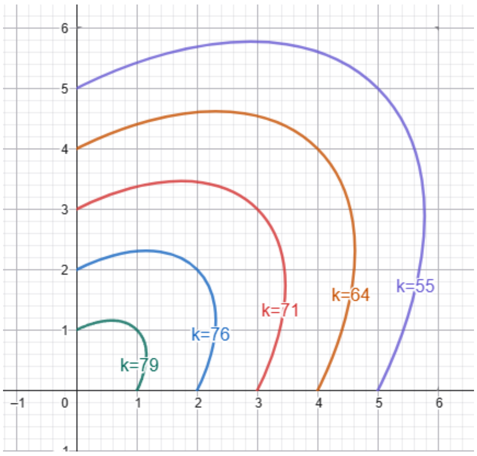
Lo anterior, es suficiente para asegurar que los vectores son paralelos entre sí, y por lo tanto, el vector $\nabla f(1;2)$ es perpendicular a la curva de nivel de ecuación $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $(1;2)$.

Recordemos, además, que el vector gradiente no sólo se dirigía en forma perpendicular (ahora a la curva de nivel) en el punto, sino que además podía deducirse que apuntaba siempre en la dirección y sentido de mayor crecimiento. Volviendo a la gráfica del campo f, lo anterior significa que si me encuentro en el punto (1,2) del plano xy y quisiera que la magnitud $f(x;y)$ creciera lo más posible, debería moverme en la dirección del gradiente (o sea, en la trayectoria que se muestra sobre la superficie). A modo de ejemplo, se muestran algunas trayectorias y entre ellas se destaca cuál es la de mayor crecimiento.



20) En cierta superficie de $6km \times 6km$ se estudia la concentración C de monóxido de carbono en el aire, medido en ppm (partes por millón).

De modo entonces, que existe un campo escalar de ley $C = C(x;y)$ que modeliza la situación y del cual, a continuación, se muestran algunas curvas de nivel:



a) Si se conoce que uno y solo uno de los siguientes es el campo vectorial $\bar{F}$ que corresponde al gradiente del campo C, es decir $\bar{F}(x;y) = \nabla C(x;y)$, decidir cuál es explicando por qué se descartaron los restantes:

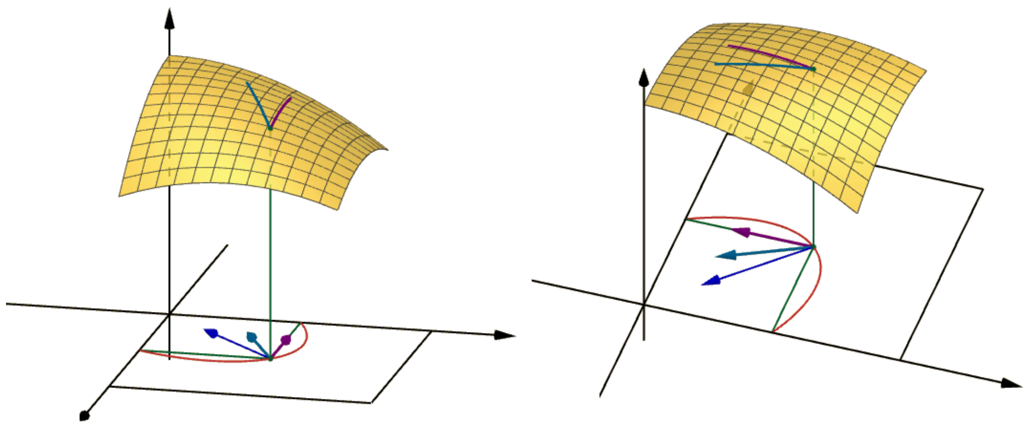
$$\bar{F}_1(x;y) = (2x + y; -2y + x) \qquad \bar{F}_2(x;y) = (-2x + y; 2y + x)$$

$$\bar{F}_3(x;y) = (-2x + y; -2y + x) \qquad f_4(x;y) = x^2 + 2y^2 - 10$$

b) Si la ley del campo C tiene la forma $C(x;y) = -x^2 - y^2 + yx + k$, hallar el valor de k y luego, determinar cuál es la concentración máxima en el terreno si se sabe que se da en un vértice del mismo.

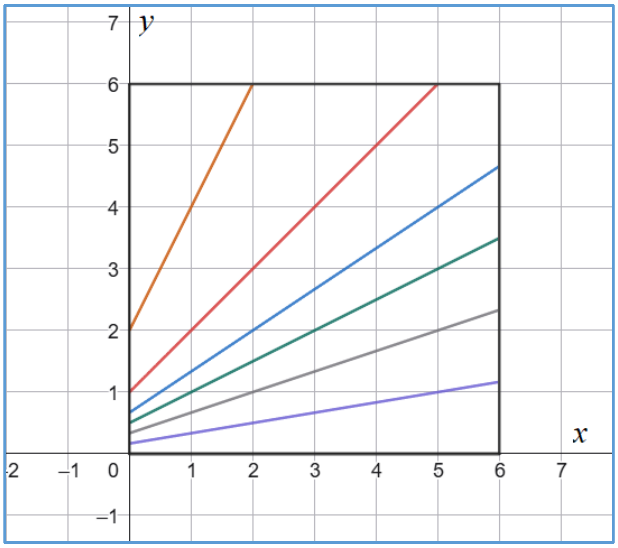
c) Calcular $\nabla C(3;3)$ y representarlo gráficamente.

d) La siguiente gráfica muestra el dominio del campo escalar que estamos estudiando (terreno de $6km \times 6km$), las alturas que representan la concentración de monóxido de carbono para cada punto formando una superficie, el punto $P(3;3;0)$ ubicado en el plano xy. Si nos concentramos en el plano xy (con dos dimensiones), se ha marcado en azul el gradiente obtenido en el inciso c) y dos vectores más señalados con (A) y (B) que tienen componentes $(-2;-1)$ y $(-2;0)$ respectivamente.



Determinar para cuál de las trayectorias marcadas sobre la superficie, la concentración de monóxido de carbono crece con mayor rapidez.

21) Se tiene una placa de madera con espesor despreciable de $6cm \times 6cm$. En cada punto de la placa, la temperatura está dada por un campo escalar de ley $T = T(x; y)$ que depende de la ubicación de cada punto sobre el ancho (x) y el largo (y) de la placa. La figura que se muestra a continuación corresponde al mapa de curvas de nivel del mismo con todos valores de nivel $k > 0$:



a) Si se conoce que una y solo una de las siguientes leyes corresponde a la de T, decidir cuál es explicando por qué se descartaron las restantes:

$T_1(x; y) = y - x$ $\quad$ $T_2(x; y) = y - x^2$ $\quad$ $T_3(x; y) = \frac{30y}{x+1}$ $\quad$ $T_4(x; y) = \frac{30y}{-x+1}$

b) Calcular $\nabla T(3; 4)$, graficarlo en la figura, y a partir de esto justificar cómo crece la temperatura en la placa (desde qué punto cardinal a qué punto cardinal).

c) Obtener algún punto de la placa donde la temperatura sea $60°C$.

V. Extremos de funciones de dos variables

22) Para los siguientes campos escalares, se pide:

a) Obtener sus puntos críticos.
b) Aplicar la condición suficiente para determinar si existen extremos relativos y/o puntos de ensilladura.
c) En caso de no poder asegurar nada con la condición suficiente, realizar otro estudio para determinar la existencia de extremos.

i) $f(x; y) = x^2 + y^3 - 6x\,y + 3x + 6y - 7$

ii) $f(x; y) = x^4 - 2x^2y - x^2 + 3y^2 + 1$

iii) $f(x; y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$

iv) $f(x; y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

v) $f(x; y) = x^2.y^2$

vi) $f(x; y) = e^{-x}.sen^2(y)$

23) La temperatura (en $°C$) en una cada punto de una placa metálica está dada por la ley:

$$T(x; y) = 100 - x^2 - y^2 + 4x + 6y$$

con $[x] = [y] = cm$.

Hallar los extremos del campo e interpretarlos en el contexto del problema.

24) La concentración de una sustancia en un reactor viene dada por

$$C(x;y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$$

Determinar el punto donde la concentración de la sustancia es la menor, y determinar si existe un punto donde la concentración sea la máxima.

25) La intensidad luminosa en un punto del plano viene dada por la ley:

$$I(x;y) = x^3 - 3xy^2$$

Determinar los puntos donde la intensidad luminosa es la menor y donde es la mayor.

26) El beneficio (en miles de dólares) de una empresa que produce dos bienes, viene dado por la ley:

$$B(x;y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y - 10$$

donde x es la cantidad que se produce del primer bien, e y la cantidad que se produce del segundo.

Hallar el beneficio máximo que puede obtener, y para qué nivel de producción se da.

27) El campo de ley $f(x;y) = ln(x) + ln(y)$ no posee puntos críticos.

a) Comprobar la afirmación dada.
b) Sin embargo, si consideramos los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, para uno y solo uno de ellos la función presenta un máximo relativo. Determinar para qué punto se cumple esto.

28) De todas las cajas rectangulares que tienen área $1728cm^2$, ¿cuál es la que tiene el volumen mayor, si:

a) la caja tiene tapa?

b) la caja no tiene tapa?

29) Un envase cilíndrico debe tener una capacidad de un litro. ¿cómo ha de diseñarse el envase para minimizar el costo?

30) Encontrar un punto sobre la curva $x^2y = 4$, cuya distancia al origen sea mínima.

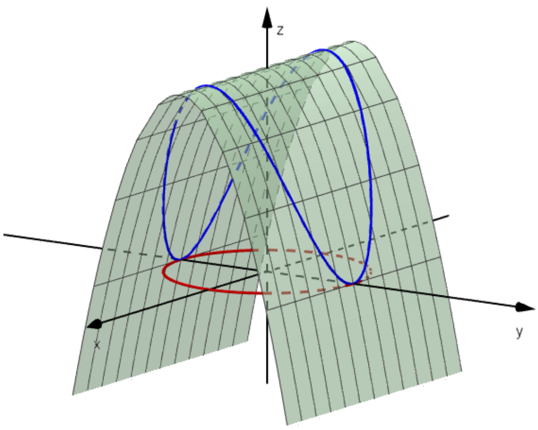
31) Determinar cuál es el punto del plano $x + y + 2z = 4$ más cercano al punto $(2;1;6)$ y calcular dicha distancia.

32) Hallar la distancia máxima y mínima que hay entre el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ al origen.

33) De todas las cajas rectangulares C que pueden contener $64cm^3$ de volumen, ¿cuál es la que requiere de menos cantidad de material en su construcción si la misma tiene:

a) sus seis caras?
b) sus caras excepto la tapa?

34) Al buscar los puntos críticos de la superficie de ecuación $z = 4 - y^2$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 4$, encontramos cuatro.



a) Hallarlos.

b) Efectivamente existen máximos y mínimos con la condición dada, como se muestra en la figura. En la misma indicar, cuál es el campo a extremar, cuál es la condición y concluir cuáles son los extremos.

Unidad 5
Programación lineal

1) Una empresa produce dos bienes A y B. Llamamos x a la cantidad de unidades que produce del producto A e y a la cantidad de unidades que produce del producto B. Entonces la empresa tiene las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La primera restricción se da por la cantidad de horas máquina disponibles, la segunda por la cantidad de materia prima disponible.

a) Explicar qué significan cada una de las cuatro restricciones.
b) Determinar cuál es la región factible de producción.
c) Si cada unidad A deja una ganancia de $U\$S\ 30$ y cada unidad B deja una ganancia de $U\$S\ 20$, plantear cuál es la función de dos variables que representa el beneficio que se obtiene según la cantidad vendida de cada unidad, y hallar cuál es la solución óptima.

2) Una fábrica posee los siguientes requerimientos y beneficios por unidad:

Producto	Recurso p	Recurso q	Ganancia
A	2	1	40
B	1	2	50
Disponibilidad de recursos	80	100	

a) Definir variables y formular el modelo de programación lineal.
b) Graficar la región factible.
c) Determinar la ganancia máxima.

3) Una empresa produce mesas (x cantidad) y sillas (y cantidad). Sabiendo que:

- No puede producir más de 60 unidades en total.
- La producción de mesas no puede superar al doble de la producción de sillas.
- Debe fabricar al menos 10 sillas.
- Cada mesa deja $80U\$S$ de ganancia, y cada silla $30U\$S$

a) Plantear el modelo de programación lineal.
b) Hallar gráficamente la región factible.
c) Maximizar el beneficio.

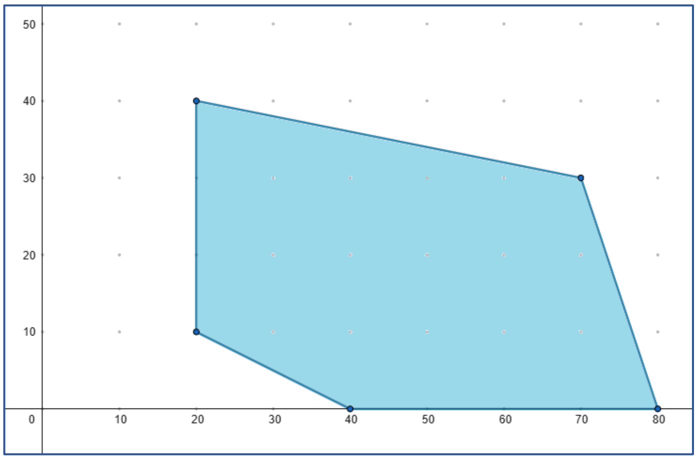
4) Una pequeña fábrica produce dos tipos de escritorios: estándar y premium. Cada escritorio estándar deja una ganancia de 40 dólares, mientras que cada escritorio premium deja una ganancia de 70 dólares. La producción de los mismos está sujeta a las siguientes restricciones:

- Cada unidad estándar usa 1 unidades de madera, y cada premium 2 unidades de madera. Se disponen de hasta 50 unidades de madera.
- Cada unidad estándar requiere 3 horas de mano de obra, y cada unidad premium 2 horas. Se disponen de hasta 90 horas de mano de obra.

- Se conoce que como mucho se deben producir 20 unidades de escritorios del tipo premium.

a) Escribir el sistema de inecuaciones que modela la programación lineal, y la ley de la función objetivo.
b) Graficar la región factible para el problema.
c) Determinar cuál es la producción que genera la mayor ganancia.

5) La siguiente gráfica muestra la región factible de producción de una empresa respecto de dos productos X e Y:



a) Escribir como sistemas de inecuaciones el modelo de programación lineal.
b) Determinar para qué niveles de producción se produce el máximo beneficio y cuál es éste, si se conoce que por unidad X vendida se obtiene una ganancia g y por unidad Y vendida se obtiene una ganancia de $g + 20$.

6) La función costo de producción de una empresa que produce dos artículos viene dada por la ley:

$$C(x; y) = 10x + 15y$$

Si debe cumplir las restricciones de demanda:

$$\begin{cases} x + y \geq 40 \\ 2x + y \geq 60 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Minimizar el costo.

7) Sea el beneficio $B(x; y) = ax + by$ y la región factible definida por:

$$\begin{cases} x + y \leq 50 \\ x \leq 40 \\ y \leq 30 \end{cases}$$

Analizar para qué valores de a y b se da la ganancia máxima, según el vértice.

8) Una panadería es famosa por sus dos especialidades de torta: la torta imperial y la torta de chocolate. La torta imperial requiere para su preparación medio kilo de azúcar y ocho huevos y se vende a 26000\$. En cambio, la torta de chocolate requiere un kilo de azúcar y ocho huevos, y se vende a \$34000. Si se conoce que en el almacén solo le quedan $10kg$ de azúcar, y 120 huevos, se pide:

a) Plantear un modelo de programación lineal, representar gráficamente la región factible, y determinar cuál es la producción que conviene realizar para obtener el beneficio máximo.

b) Analizar qué sucede si varía el precio de la torta de chocolate (mayor o menor, con los límites correspondientes).

8) Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves, una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas; y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 unidad de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale $0{,}30\ U\$S$ y el kilo de pienso compuesto vale $0{,}52\ U\$S$, se pide:

a) ¿Cuál es la composición de la dieta que minimiza los gastos del granjero?
b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer más de 1 kilo diario de pienso compuesto?

9) Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de $4mg$ de vitamina A y $6mg$ de vitamina B en el pienso compuesto que da a sus vacas. Dispone de ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo se muestran en la siguiente tabla:

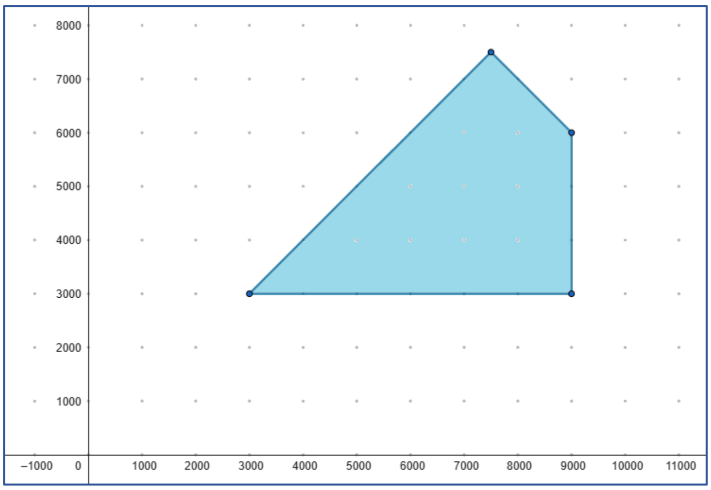
	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

Si el kilogramo de pienso P_1 vale $0{,}4\ U\$S$ y el de pienso P_2 vale $0{,}6\ U\$S$, ¿cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas al costo más bajo posible?

10) Una persona tiene $15000\ U\$S$ para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A devuelve un interés anual del 9% y del tipo B del 5%.

Sin embargo, hay una restricción de máximo de dinero para invertir en las acciones del tipo A y un mínimo para invertir en las del tipo B.

A continuación, se muestra la región factible para la inversión de esta persona, acorde con las restricciones o requisitos que él posea:



a) ¿Cuáles son las restricciones de inversión para ambas acciones?
b) Él decidió previamente invertir en una de las acciones igual cantidad o más que en la otra. ¿en cuál?

c) ¿Cómo debe invertir los 15000 $U\$S$ para que el beneficio sea el máximo?
d) ¿Cuál es ese beneficio?

11) Un grupo de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1200 socios a ver la final de su equipo.

La empresa dispone de colectivos de 50 asientos y de micros de 30 asientos. El precio de cada colectivo es de 252 dólares y el de cada micro de 180 dólares.

Sabiendo que la empresa sólo dispone de 28 choferes, se pide:

a) ¿Qué número de colectivos y micros deben contratarse para conseguir el mínimo costo posible?
b) ¿Cuál será el valor de dicho costo mínimo?

Unidad 6
Matemática financiera

I. Conceptos básicos

1) Una persona debe elegir entre las siguientes opciones:

- Opción A: recibir $\$10.000$ hoy
- Opción B: recibir $\$12.000$ dentro de un año

a) ¿Cuál conviene si la tasa de interés es del 10% anual?
b) ¿Cuál conviene si la tasa es del 25% anual?
c) Justificar en cada caso.

2) Representar en una línea de tiempo la siguiente operación financiera:

Se invierten $\$8000$ hoy al 15% anual durante 2 años.

Indicar:

- Capital inicial
- Intereses generados
- Monto final

3) En cada una de las siguientes situaciones, identificar:

- Capital (C)
- Tasa de interés (i)
- Tiempo (t)
- Monto (M)

a) Se invierten $\$5000$ al 12% anual durante 3 años y se obtienen $\$6800$.
b) Se desea obtener $\$10.000$ dentro de 2 años con una tasa del 10%.

II. Interés simple

$$M(t) = C.(1 + i.t)$$

4) Se invierten $\$5000$ al 8% anual durante 3 años.

a) Calcular el interés generado.
b) Calcular el monto final.

5) El monto final de una inversión es de $\$6500$ luego de 2 años a una tasa del 10% anual simple. ¿Cuál era el capital inicial?

6) Construir la función del monto $M = M(t)$ en función del tiempo para una inversión de $\$10.000$ al 6% anual simple.

7) Se tiene la posibilidad de dos inversiones:

- A: $8000 al 12% anual simple durante 2 años
- B: $8000 al 10% anual simple durante 3 años

a) Calcular el monto final en cada caso.
b) ¿Cuál conviene más? Justificar.

III. Interés compuesto

$$M(t) = C.(1+i)^t$$

8) Se invierten $10.000 al 5% anual compuesto durante 4 años. Calcular el monto final.

9) Se invierten $10.000 al 10% anual durante 3 años:

a) Calcular el monto usando interés simple.
b) Calcular el monto usando interés compuesto.
c) Comparar los resultados y explicar la diferencia.

10) Explicar con tus palabras por qué el interés compuesto genera un crecimiento más rápido que el interés simple.

11) Se obtiene un monto final de $16.000 a partir de un capital de $10.000 en 4 años. Suponiendo interés compuesto, calcular la tasa anual.

12) Se tiene un capital inicial C. ¿Qué tasa de interés debe aplicarse sobre él para que se duplique en un tiempo de 6 años si:

a) el interés es simple?
b) el interés es compuesto?

IV. Tasas de interés

13) Convertir una tasa nominal anual del 24% capitalizable mensualmente a tasa efectiva mensual.

14) Se presentan dos opciones de inversión:

- Opción A: 20% anual
- Opción B: 18% anual capitalizable trimestralmente

a) Determinar la tasa efectiva anual de cada opción.
b) ¿Cuál conviene más?

V. Rentas o anualidades

15) Se depositan $1000 al final de cada mes durante 12 meses en una cuenta que paga un 2% mensual. Calcular el valor futuro de la renta.

16) Una persona desea retirar $500 por mes durante 6 meses. Si la tasa es del 2% mensual, calcular el valor actual necesario.

17) Representar en una línea de tiempo los pagos correspondientes al ejercicio 15. Indicar claramente los momentos en los que se realiza cada depósito.

VI. Sistemas de amortización

18) Se solicita un préstamo de \$50.000 a una tasa del 3% mensual, a devolver en 12 cuotas mensuales iguales. Calcular el valor de la cuota.

19) Construir las primeras tres filas del cuadro de amortización del ejercicio anterior.

El cuadro debe incluir:

- Período
- Cuota
- Interés
- Amortización
- Saldo

20) Responder:

a) ¿Por qué en los primeros períodos se paga más interés que capital?
b) ¿Cómo evoluciona la deuda a lo largo del tiempo?

VII. Problemas de integración

21) Un producto cuesta:

- \$20.000 al contado
- o 6 cuotas de \$4000

Si la tasa de interés es del 3% mensual:

a) Determinar el valor actual de las cuotas.
b) ¿Conviene pagar al contado o en cuotas?

22) Una persona puede:

- pedir un préstamo al 25% anual
- o invertir su dinero al 18% anual

a) Analizar si conviene endeudarse para invertir.
b) Justificar la respuesta.

23) Una persona decide ahorrar depositando \$2000 por mes durante 2 años en una cuenta con tasa del 2% mensual.

Luego utiliza el dinero acumulado como anticipo para un préstamo.

a) Calcular el monto acumulado.
b) Si solicita un préstamo de \$100.000, ¿cuánto deberá financiar?
c) Explicar la situación financiera completa.

24) En un proyecto se invierten \$2.000.000 y al final de un año el proyecto devuelve en total \$2.500.000.

a) Representar gráficamente esta transacción.
b) ¿Cuál es el interés que se obtuvo en este proyecto?
c) ¿Cuál es la tasa de interés que se gana en este proyecto?

25) Juan deposita en una cuenta de ahorros $\$3.500.000$ hoy y, al cabo de seis meses, hace un retiro de la totalidad de la cuenta igual a $\$4.150.000$.

a) ¿Cuál es el interés que obtuvo en la cuenta de ahorros?
b) ¿Cuál es la tasa de interés que gana en la cuenta de ahorros?